

ARITHMÉTIQUE

- 1** Effectuer la division euclidienne de a par b .
- $a = 2\,019$; $b = 7$
 - $a = 1\,515$; $b = 11$
 - $a = 7$; $b = 2\,019$
 - $a = 484$; $b = 4$
- 2** 1. Soit $a = 4k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Quel est le reste de la division euclidienne de a par 4 ?
 2. On sait que le reste de la division euclidienne de b par 4 est 3. Comment peut-on écrire b ?
- 3** Choisir la (ou les) bonne(s) réponse(s).
- n désignant un entier relatif, l'entier $9n + 6$ est un multiple de :
 a. 6 b. 3 c. 9 d. 2
 - Le reste d'une division euclidienne d'un entier par 5 ne peut pas prendre la valeur :
 a. 0 b. 5 c. 2,5 d. 4
 - Parmi les entiers suivants, indiquer lesquels n'ont que deux diviseurs entiers naturels :
 a. 1 b. 89 c. 2 d. 10
 - Si un entier n est divisible par 8, alors :
 a. il est multiple de $4n$ b. il est divisible par 16
 c. $\frac{8}{n}$ est un entier d. $\frac{n}{8}$ est un entier
- 4** 1. Justifier que 98 est un multiple de 14.
 2. Traduire cette propriété avec chacune des expressions suivantes :
 - « est diviseur de » - « a pour diviseur »
 - « est divisible par » - « a pour multiple »
- 5** Compléter les phrases suivantes en remplaçant les pointillés par « diviseur » ou « multiple ».
- 350 est un de 50.
 - 13 est un de 260.
 - 0 est un de 89.
 - 1 est un de 16.
 - 42 est un de 42.

- 6** 1. Donner tous les diviseurs positifs de 11.
 2. Donner tous les diviseurs positifs de 21.
 3. Déterminer tous les multiples de 9 inférieurs à 50.
- 7** On donne $a = 10k$ et $b = 6k$, avec k entier.
- Montrer que a est un multiple de 2.
 - Montrer que b est un multiple de 3.
 - Est-ce que 8 est un diviseur de $a + b$?
- 8** Comment peut-on écrire un entier multiple de 5 ? Un entier multiple de 9 ?
- 9** On sait que 6 est un diviseur des nombres a et b .
- Comment peut-on écrire a et b ?
 - Montrer que 6 est un diviseur de $c = a - b$.
 - Montrer que 18 est un diviseur de $d = ab$.
- 10** 1. Montrer que si 7 est un diviseur de a , alors 7 est un diviseur de a^2 .
 2. Donner deux autres diviseurs de a^2 .
- 11** Soit b un nombre entier. Montrer que la somme de b et des deux entiers qui suivent b est un multiple de 3.
- 12** Déterminer un nombre entier qui est pair, inférieur à 1 000, divisible par 5 et par 7, et multiple de 13.
- 13** Combien y a-t-il de multiples de 17 entre 1 et 100 ?
- 14** 1. Montrer que, si a et b sont des multiples de 11, alors $a + b$ est un multiple de 11.
 2. Énoncer la propriété précédente en termes de diviseurs.
 3. Écrire la réciproque de la proposition donnée à la question 1. Est-elle vraie ?
- 15** Soit a un entier multiple de 6 et b un entier multiple de 15.
- Montrer que $a + b$ est un multiple de 3.
 - Montrer que $a \times b$ est un multiple de 90.

- 16** On pose $a = 2n - 7$ et $b = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Calculer $a - 2b$.
 - Soit d un diviseur de a et b .
 a. Montrer que d est un diviseur de $a - 2b$.
 b. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
- 17** Les âges de quatre cousins Emma, Baptiste, Lily et Nathan sont 3, 8, 12 et 14 ans. La somme des âges de Lily et Emma est divisible par 5, celle des âges de Nathan et Lily est aussi divisible par 5. Quel est l'âge de Baptiste ?
- 18** On cherche un nombre entier compris entre 15 000 et 16 000, dont tous les chiffres sont différents et tel que son chiffre :
 - des centaines est un multiple de 3
 - des unités est un nombre pair supérieur à 5
 - des dizaines est le successeur du chiffre des centaines
 Donner toutes les possibilités pour ce nombre.
- 19** Pierre affirme : « Si le carré de l'entier a est un diviseur de l'entier naturel n , alors a est un diviseur de $\sqrt{n}$ ». Son professeur lui répond que sa proposition n'a pas de sens. Pourquoi ?
- 20** La proposition suivante est-elle vraie ?
 « Si l'entier a est un diviseur de l'entier b et s'il est aussi un diviseur de l'entier c , alors a^2 est un diviseur du produit bc . »
- 21** 1. Déterminer le nombre de diviseurs positifs des entiers $a = 27$ et $b = 20$.
 2. Dresser la liste des diviseurs positifs des entiers 36 ; 49 ; 63.
- 22** Alexis affirme : « Les diviseurs positifs d'un entier naturel n marchent toujours par deux : si a est un diviseur de n , il existe un diviseur b de n tel que $ab = n$. Un entier a donc toujours un nombre pair de diviseurs positifs ». Que peut-on penser de ce raisonnement ?

23 On note $\overline{aa}$ un nombre formé de deux chiffres a , comme par exemple 33. Deux entiers naturels sont diviseurs de tous les entiers de la forme $\overline{aa}$. Lesquels ?

24 1. Vérifier que 888 111 est divisible par 37.
2. Montrer que les nombres de la forme $\overline{aaabbb}$, avec $a ; b \in \mathbb{N}^2$ sont divisibles par 37.

25 Soit $a = 4p$ et $b = 5q$, avec p et q entiers.
1. Justifier que a est pair.
2. b peut-il être pair ?
3. Montrer que $c = ab$ est un multiple de 10.

26 Montrer que le produit de deux nombres pairs est un multiple de 4.

27 Montrer que si 11 est un entier pair, alors l'entier $a = n^2(n + 20)$ est un multiple de 8.

28 Montrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 4.

29 Montrer que le cube d'un nombre pair est un multiple de 8.

30 Les trois côtés d'un triangle rectangle sont des nombres entiers. Montrer qu'au moins un de ces nombres est pair. *Piste : raisonner par l'absurde.*

31 Décomposer les nombres suivants en produit de facteurs premiers : 35, 42, 50, 99, 100.

32 Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 112 ; 360 ; 490 ; 495 ; 1 140.

33 Déterminer si les nombres suivants sont des nombres premiers : 18, 37, 41, 89, 101.

34 Les nombres suivants sont-ils premiers ?
579 ; 911 ; 1021 ; 5 743 ; 8191

35 1. Le nombre 111 est-il premier ?
2. Justifier que le nombre 11 111 (avec 99 fois le chiffre 1) n'est pas premier.

36 Soit p un nombre premier. Le nombre p^2 est-il premier ?

37 Soit p un nombre premier.
1. Quels sont les diviseurs positifs de p ?
2. Quels sont les diviseurs positifs de p^2 ?

38 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que $a = (n + 4)(n + 2)$ n'est pas premier.

39 1. Donner deux nombres entiers consécutifs premiers.
2. Pourquoi ne peut-on pas trouver trois nombres entiers consécutifs premiers ?

40 Déterminer le plus petit nombre entier positif impair qui admet trois diviseurs premiers différents.

41 Montrer que, si p est un nombre premier supérieur à 2, alors $p + 5$ n'est pas premier.

42 0. Le nombre $n^2 - n + 5$ est-il un nombre premier pour tout entier naturel n ?
1. Le nombre $n^2 - n + 11$ est-il un nombre premier pour tout entier naturel n ?
2. Le nombre $n^2 + n + 41$ est-il un nombre premier pour tout entier naturel n ?

43 Soit p et q deux nombres premiers différents et au moins égaux à 3. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.
1. $p + q$ est un nombre pair.
2. $p + q$ est un nombre premier.
3. $p \times q$ est un nombre premier.
4. $p \times q$ est un nombre impair.

44 On a vu en cours que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. En utilisant ce résultat, montrer en raisonnant par l'absurde que :
a. $5\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel;
b. $\sqrt{2} + 3$ est un nombre irrationnel;
c. $\sqrt{\sqrt{2}}$ est un nombre irrationnel.

45 On dit qu'un entier est un carré parfait s'il est le carré d'un autre entier. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a l'équivalence suivante : « $\sqrt{n}$ est un entier si, et seulement si, n est un carré parfait. »

46 Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
2. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
3. Le carré d'un nombre irrationnel est un nombre rationnel.

47 Étant donné un entier n supérieur ou égal à 10, on appelle associé de n l'entier obtenu en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines et celui des unités de n . Par exemple, l'associé de 5 467 est 54 607.

1. a. Quel est l'associé de 768 492 ?
b. Les entiers 2 009 et 2019 sont-ils les associés d'un nombre ? Si oui, duquel ?
2. a. Démontrer la propriété suivante : « Si n est un entier divisible par 9, alors son associé l'est également ».
b. Formuler la réciproque de la propriété précédente.
c. Cette réciproque est-elle vraie ? Justifier.
3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur l'entier n pour que son associé soit divisible par 4, puis la démontrer.