

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Soient (d_1) et (d_2) les droites d'équation $2x - 3y + 21 = 0$ et (d_2) d'équation $3x + 2y - 1 = 0$. On peut vérifier que ces droites sont bien sécantes car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Déterminer leur point d'intersection revient à résoudre simultanément :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 21 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -21 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Résoudre un système, c'est trouver **tous les couples $(x; y)$ pour lesquels les deux égalités soient vraies simultanément.**

I Résolution par combinaison

Deux principes de base guident la résolution :

- on ne change pas une égalité lorsqu'on multiplie ses deux membres par un même coefficient
- ajouter ou soustraire deux égalités membre à membre donne une nouvelle égalité.

Méthode : l'objectif est d'éliminer une inconnue en combinant les deux équations

- 1° Multiplier (ou diviser) par des coefficients bien choisis pour faire en sorte qu'il y ait le même coefficient devant l'une des deux inconnues dans les deux équations. *(si on a les « mêmes » coefficients mais avec des signes opposés, ça va aussi)*
- 2° Soustraire les deux équations (ou les additionner si on avait des signes opposés) pour faire disparaître une inconnue.
- 3° Résoudre l'équation obtenue *(elle n'a plus qu'une seule inconnue !)*
- 4° Remplacer l'inconnue trouvée par sa valeur dans l'une des deux équations initiales et résoudre.

Ex 1 : Résoudre le système $\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 7x + 2y = 17 \end{cases}$

Étape 1 : Les coefficients de x ne se combinent pas bien (5 et 7) alors que ceux de y oui.

On multiplie la **seconde** équation par **2** :

$$\begin{cases} 5x - 4y = 23 \\ 14x + 4y = 34 \end{cases}$$

Étape 2 : on **additionne** les deux équations, membre à membre

$$5x - 4y + 14x + 4y = 23 + 34$$

$$19x = 57$$

Étape 3 : on résout la nouvelle équation ainsi obtenue.

$$x = \frac{57}{19}$$

$$x = 3$$

Étape 4 : on remplace maintenant x par 3 dans l'une des deux équations de départ (la plus simple)

$$7x + 2y = 17 \text{ donne } 7 \times 3 + 2y = 17$$

$$21 + 2y = 17$$

$$2y = 17 - 21$$

$$2y = -4$$

$$y = \frac{-4}{2} = -2$$

La solution de ce système est donc $(3 ; -2)$.

Autre exemple : Si on avait obtenu le système suivant
$$\begin{cases} 6x - 15y = 21 \\ 6x + 8y = -2 \end{cases}$$

Ici, on ferait une **soustraction** pour éliminer les x : attention aux signes !

$$6x - 15y - (6x + 8y) = 21 - (-2)$$

$$6x - 15y - 6x - 8y = 21 + 2$$

$$-23y = 23 \text{ et donc } y = -1$$

Remarques :

1° Bien choisir l'inconnue que l'on va éliminer *en fonction des coefficients apparaissant dans les équations...* Il faut faire au plus simple.

2° Bien choisir l'équation dans laquelle on va remplacer l'inconnue trouvée (simplicité là encore)

3° Penser à « simplifier » les équations avant de commencer si cela est possible :

↪ L'équation $420x + 630y = 210$ devient $42x + 63y = 21$ en divisant par 10, puis $6x + 9y = 3$ en divisant par 7 et même $2x + 3y = 1$ en divisant par 3 : c'est mieux non...?

↪ L'équation $\frac{5}{3}x - 2y = 7$ devient $5x - 6y = 21$ en multipliant par 3 pour faire disparaître la fraction.

4° On peut gagner du temps sur les calculs en sautant des étapes, à ses risques et périls...

5° Pour rédiger clairement ET rapidement, on peut nommer les équations L_1 (pour la « ligne 1 ») et L_2 (pour la « ligne 2 »). On peut aussi indiquer à côté des équations par combien on les multiplie en indiquant par exemple $(\times 3)$

Revenons à notre exemple de départ. L'intersection des deux droites donnait
$$\begin{cases} 2x - 3y = -21 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

Que ce soit pour les x ou les y , les choses ne s'arrangent pas « simplement » : il faut ruser un peu...

$$\begin{cases} 2x - 3y = -21 & (\times 3) \\ 3x + 2y = 1 & (\times 2) \end{cases} \text{ donne } \begin{cases} 6x - 9y = -63 \\ 6x + 4y = 2 \end{cases}$$

$$L_2 - L_1 : 4y - (-9y) = 2 - (-63)$$

$$13y = 65$$

$$y = \frac{65}{13} = 5$$

Je remplace dans $L_1 : 2x - 3 \times 5 = -21$

$$2x - 15 = -21$$

$$2x = -21 + 15$$

$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

Le point d'intersection est donc le point de coordonnées $(-3 ; 5)$.

⇒ Lors de l'étape addition / soustraction, si tout disparaît, cela signifie que les deux équations du système étaient en fait les mêmes. Il y a donc une infinité de solutions au système (*droites confondues*).

$$\underline{\text{Ex}} : \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases} \Rightarrow L_1 - L_2 : 0 = 0 \Rightarrow \text{La droite } 3x - 2y = 5 \text{ est solution}$$

⇒ Lors de l'étape addition / soustraction, si les inconnues disparaissent mais qu'il reste des nombres différents, cela signifie que le système est impossible. Il n'y a donc pas de solutions (*droites parallèles*).

$$\underline{\text{Ex}} : \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow L_1 - L_2 : 0 = 1 \Rightarrow \text{Impossible : pas de solutions !}$$

II Résolution par substitution

Méthode : 1° Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir d'une des deux équations

2° Substituer dans l'autre équation cette inconnue par sa « nouvelle expression »

3° Résoudre la nouvelle équation ainsi obtenue

⇒ Cette méthode est surtout intéressante dans des cas « simples » ou des cas particuliers...

$$\underline{\text{Ex}} : \text{Résoudre le système suivant } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x + 2y = 25 \end{cases}$$

L_1 permet d'isoler très facilement y : $2x - 1 = y$

On remplace alors y par son expression dans L_2 :

$$5x + 2(2x - 1) = 25$$

$$5x + 4x - 2 = 25$$

$$9x = 25 + 2$$

$$x = \frac{27}{9} = 3$$

Or, on a vu que $y = 2x - 1$ donc $y = 2 \times 3 - 1 = 5$

La solution de ce système est $(3 ; 5)$

III Applications

Lorsqu'un problème met en évidence deux inconnues, on peut essayer de résoudre en modélisant le problème par un système d'équations...

Ex 1 : Toto va acheter des croissants et des pains aux raisins tous les week-ends. Samedi, il a acheté 3 croissants et 2 pains aux raisins pour 5,15 € et dimanche il a acheté 2 croissants et 5 pains aux raisins pour 7,65 €. Combien coûte un croissant ? Combien coûte un pain aux raisins ?

Notons c le prix d'un croissant et p le prix d'un pain aux raisins.

$$\begin{cases} 3c + 2p = 5,15 & (\times 2) \\ 2c + 5p = 7,65 & (\times 3) \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} 6c + 4p = 10,30 \\ 6c + 15p = 22,95 \end{cases}$$

$$L_2 - L_1 : 15p - 4p = 22,95 - 10,30$$

$$11p = 12,65$$

$$p = \frac{12,65}{11} = 1,15$$

Je remplace dans L_1 : $3c + 2 \times 1,15 = 5,15$

$$3c = 5,15 - 2,30$$

$$c = \frac{2,85}{3} = 0,95$$

Un croissant coûte 0,95 € et un pain aux raisins 1,15 €

Ex 2 : Déterminer la fonction affine $f(x) = mx + p$ dont la représentation graphique passe par les points A(3 ; 0) et B(-1 ; 8).

Avec A, on obtient $f(3) = m \times 3 + p = 0$ et avec B on obtient $f(-1) = m \times (-1) + p = 8$

$$\text{D'où le système} \quad \begin{cases} 3m + p = 0 \\ -m + p = 8 \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 3m - (-m) = 0 - 8$$

$$4m = -8$$

$$m = \frac{-8}{4} = -2$$

Je remplace dans L_2 : $-(-2) + p = 8$

$$p = 8 - 2 = 6$$

La fonction affine cherchée était donc $f(x) = -2x + 6$

Bonus : Une mère à 25 ans de plus que sa fille, et dans 15 ans, elle aura le double de l'âge de sa fille. Quels sont les âges de la mère et de la fille ?

Notons m l'âge de la mère et f celui de la fille et formons un système. Attention à l'information « dans 15 ans » !