

VARIATIONS D'UNE FONCTION

I Sens de variation

1° Définition

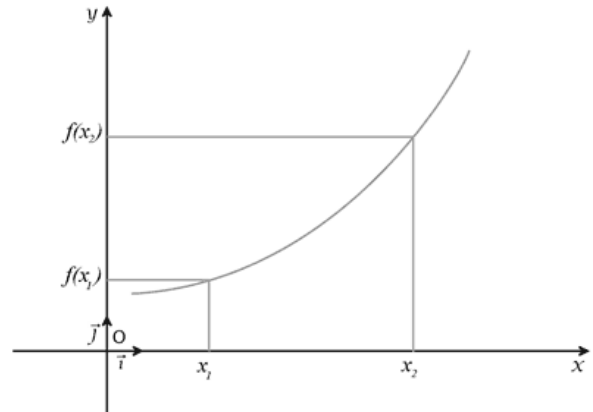
→ Une fonction f est dite **croissante** sur un intervalle I si lorsque les valeurs de x augmentent dans I alors les valeurs de $f(x)$ **augmentent**.

Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques de I .

f croissante sur I signifie que :

Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$

Autrement dit, une fonction croissante **conserve** l'ordre des nombres : les réels de l'intervalle I et leurs images sont rangés dans **le même ordre**.



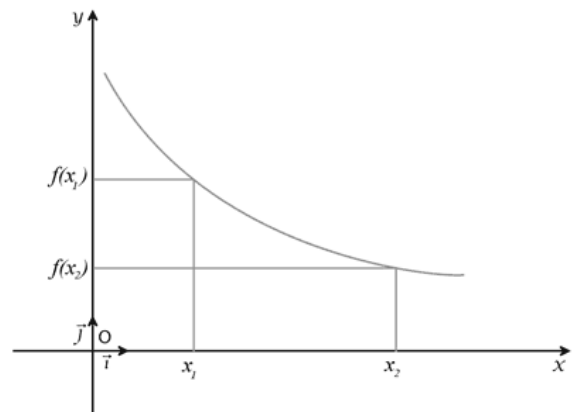
→ Une fonction f est dite **décroissante** sur un intervalle I si lorsque les valeurs de x augmentent dans I alors les valeurs de $f(x)$ **diminuent**.

Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques de I .

f décroissante sur I signifie que :

Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Autrement dit, une fonction décroissante **inverse** l'ordre des nombres : les réels de l'intervalle I et leurs images sont rangés dans **le sens contraire**.



Ex : Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = 5 - 3x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

⇒ C'est une fonction affine, de coefficient directeur -3 : on sait qu'elle est décroissante.

Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques tels que $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 5 - 3x_2 - (5 - 3x_1) \\ &= 5 - 3x_2 - 5 + 3x_1 \\ &= 3(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Or, $x_1 \leq x_2$ donc $x_1 - x_2 \leq 0$

Ainsi $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ et donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$

A retenir : Une fonction croissante sur I **conserve les inégalités** sur I , et une fonction décroissante **les inverse**.

C'est ce qu'on utilise déjà dans la résolution des inéquations : multiplier par -3 inverse les inégalités car la fonction qui multiplie un nombre par -3 est $f(x) = -3x$; et cette fonction est une fonction décroissante !

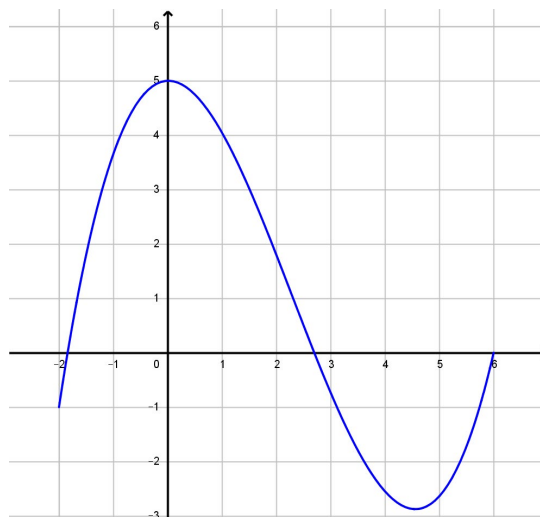
2° Tableau de variations

Considérons la fonction f de courbe représentative ci-contre :

On peut représenter ses variations sous la forme d'un tableau avec des flèches :

x	-2	0	4,5	6
$f(x)$	-1	5	-2,5	0

Flèches : de -1 à 5 (croissant), de 5 à -2,5 (décroissant), de -2,5 à 0 (croissant).



Lecture : f est croissante **sur** $[-2 ; 0]$ et sur $[4,5 ; 6]$ et décroissante **sur** $[0 ; 4,5]$

On peut par ailleurs dire que $f(0) = 5$ (et pas $f(5) = 0$!)

Remarques :

- Le graphe doit indiquer clairement les coordonnées, sinon, il faut les vérifier par le calcul...
- Lorsque $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, on indique $+\infty$ et $-\infty$ comme bornes dans le tableau
- Penser à indiquer les valeurs interdites par **une double barre** si besoin !

Réciproquement, on exploite un tableau de variation pour donner certaines informations.

Ex : On considère la fonction f dont le tableau de variation est le suivant :

x	-5	-1	0	6
$f(x)$	-7	4	-3	2

Flèches : de -7 à 4 (croissant), de 4 à -3 (décroissant), de -3 à 2 (croissant).

1° Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ puis en donner un encadrement.

2° Même question pour l'équation $f(x) = 3$.

1° Il y a **trois** solutions : $-5 \leq x_1 \leq -1$ (car la fonction passe de -7 à 4)

$-1 \leq x_2 \leq 0$ (car la fonction passe de 4 à -3)

$0 \leq x_3 \leq 6$ (car la fonction passe de -3 à 2)

2° Il y a **deux** solutions : $-5 \leq x_1 \leq -1$ et $-1 \leq x_2 \leq 0$

II Extrema d'une fonction (un extremum, des extrema)

Le maximum d'une fonction f sur un intervalle I est, lorsqu'il existe, la plus grande valeur de l'ensemble des images de la fonction f sur I .

Autrement dit, si M est le maximum de f sur I alors :

- tout réel $x \in I$, on a $f(x) \leq M$
- il existe un certain $x_0 \in I$ tel que $M = f(x_0)$

Le minimum d'une fonction f sur un intervalle I est, lorsqu'il existe, la plus petite valeur de l'ensemble des images de la fonction f sur I .

Autrement dit, si m est le minimum de f sur I alors :

- tout réel $x \in I$, on a $m \leq f(x)$
- il existe un certain $x_1 \in I$ tel que $m = f(x_1)$

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Important : ne pas oublier qu'un extremum est toujours une valeur atteinte par la fonction !

Remarque : lorsque l'intervalle de recherche n'est pas précisé, cela signifie que c'est l'ensemble de définition qu'il faut prendre en compte. On peut alors parler d'extremum global par opposition à un extremum local lorsqu'on se limite à un intervalle plus petit.

Ex : considérons la fonction f dont la représentation graphique est la suivante :

Cette fonction est définie sur $[-2 ; 8]$.

Son maximum est 6.

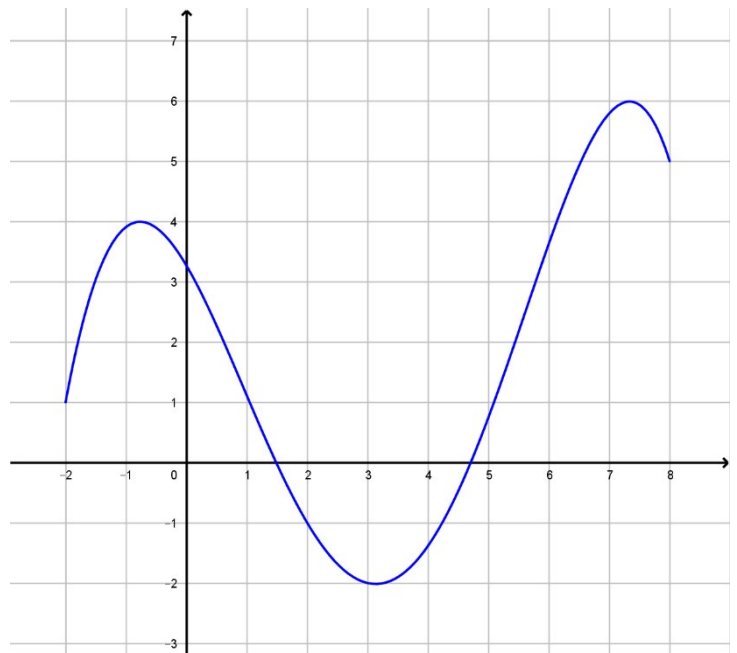
Il est atteint en $x \approx 7,3$

Son minimum est -2

Il est atteint en $x \approx 3,1$

Si l'on se restreint à $[-2 ; 5]$, le maximum est 4 et le minimum est -2.

Et si l'on se restreint à $[2 ; 6]$, $M \approx 3,6$ et $m = -2$.



III Fonctions de référence

1° Fonction inverse

La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$

Cette fonction est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty[$

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux réels de $] -\infty ; 0[$ tels que $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \end{aligned}$$

Or, $x_1 \leq x_2$ donc $x_1 - x_2 \leq 0$.

De plus, $x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ donc $x_1 x_2 > 0$

Ainsi $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ et donc f est décroissante sur $] -\infty ; 0[$.

Démonstration similaire sur $] 0 ; +\infty[$.



C'est cette décroissance qui explique que l'on inverse les inégalités dans les inéquations lorsqu'on passe à l'inverse. Mais c'est une grande source d'erreurs car il faut penser à vérifier qu'on est bien soit sur $] -\infty ; 0[$ soit sur $] 0 ; +\infty[$!

Ex 1 : Voilà les étapes proposées pour la résolution de l'inéquation $\frac{3}{x} \leq 0,4$:

① Inverser : $\frac{x}{3} \geq \frac{1}{0,4}$

② Multiplier par 3 : $x \geq 2,5 \times 3$

③ Calculer : $x \geq 7,5$

④ Conclure : $x \in [7,5 ; +\infty[$

L'étape ① est **fausse** : on est sur l'intervalle $] -\infty ; 0,4]$ lequel n'est **contenu ni dans** $] -\infty ; 0[$ **ni dans** $] 0 ; +\infty[$. On ne peut donc pas inverser...

On distingue alors deux cas : si $x < 0$ c'est toujours vrai, et si $x > 0$ tout ce qui a été proposé est correct puisqu'on est alors dans $] 0 ; +\infty[$. D'où finalement $x \in] -\infty ; 0] \cup [7,5 ; +\infty[$.

Ex 2 : Voilà les étapes proposées pour la résolution de l'inéquation $\frac{3}{x} \geq 0,4$:

① Inverser : $\frac{x}{3} \leq \frac{1}{0,4}$

② Multiplier par 3 : $x \leq 2,5 \times 3$

③ Calculer : $x \leq 7,5$

④ Conclure : $x \in] -\infty ; 7,5]$

L'étape ① est **légitime** car on est sur l'intervalle $[0,4 ; +\infty[$ qui est contenu dans $] 0 ; +\infty[$.

Tout à donc l'air correct. Et pourtant, si la solution était vraiment « $x \in] -\infty ; 7,5]$ » alors -1 devrait être une solution. Or, $\frac{3}{-1} = -3$ et $-3 \not\geq 0,4$...

Le problème vient de l'étape ① dans laquelle il ne faut pas oublier que $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{1}{0,4}$

La solution correcte est donc en fait $x \in] 0 ; 7,5]$

2° Fonction carré

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Cette fonction est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux réels de $] -\infty ; 0]$ tels que $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

Or, $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$.

De plus, $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Ainsi $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ et donc f est décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

Démonstration similaire sur $[0 ; +\infty [$. La différence vient de l'étape :

« De plus, $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ donc $x_1 + x_2 \geq 0$ »

Mêmes réserves que précédemment : avant de passer au carré les membres d'une inégalité, il faut s'assurer qu'ils sont tous les deux négatifs (et dans ce cas l'inégalité change de sens) ou tous les deux positifs.

3° Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Cette fonction est strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

Preuve : Soient x_1 et x_2 deux réels de $[0 ; +\infty [$ tels que $x_1 \leq x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} \\ &= \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} && \text{C'est ce qu'on appelle "multiplier par la partie conjuguée"} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \end{aligned}$$

Or, $x_1 \leq x_2$ donc $x_2 - x_1 \geq 0$.

De plus, $\sqrt{x_1} \geq 0$ et $\sqrt{x_2} \geq 0$ donc $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} \geq 0$

Ainsi $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ et donc f est croissante sur $[0 ; +\infty [$.