

PROBABILITÉS

I Vocabulaires des probabilités

On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine.

Quoi que le résultat ne soit pas complètement prévisible, il est possible d'étudier une telle expérience.

Définition : on appelle issues les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire.

L'ensemble des issues est appelé univers : on le note Ω .

Ex : On lance une pièce et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{P ; F\}$

On lance un dé à 6 faces et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

On lance deux dés et on note la somme des faces obtenues :

$$\Omega = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$$

On lance deux dés et on note le produit des faces obtenues :

$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$$

Définition : Un événement est une condition qui mène à une ou plusieurs issues.

On dit qu'un événement est réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire est l'une des issues possibles pour cet événement.

Ex : on lance deux dés à 6 faces. Soit A l'événement « La somme des valeurs obtenues est 8 ».

L'événement A est réalisé si l'issue est par exemple $(3 ; 5)$.

L'événement A est composé des issues $(2 ; 6), (3 ; 5), (4 ; 4), (5 ; 3)$ et $(6 ; 2)$.

Cas particulier :

- Evènement certain : qui se produira obligatoirement ! C'est l'ensemble Ω .

Ex : avec un lancer de dé « Obtenir un résultat plus petit que 7 »

- Evènement impossible : qui ne pourra jamais se produire. C'est l'ensemble $\emptyset$.

Ex : avec un lancer de dé « Obtenir 8 »

Définition : L'évènement contraire de A , noté $\bar{A}$, est l'évènement qui contient tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A .

II Probabilités dans un ensemble fini

1° Définitions

Lorsqu'on répète une expérience aléatoire, on appelle fréquence d'apparition d'une issue le nombre :

$$f = \frac{\text{Nombre de fois où l'issue apparaît}}{\text{Nombre de fois où l'expérience est effectuée}}$$

Par exemple, si on lance une pièce de monnaie 100 fois et qu'on obtient 40 fois Pile, on dit que la

fréquence d'apparition de Pile est $\frac{40}{100} = 0,40$ (c'est-à-dire 40%)

On sait qu'on devrait s'attendre à 50% de Pile : cette pièce est-elle truquée pour donner moins de Pile, ou bien a-t-on simplement manqué de chance ?

On constate que si l'expérience est réalisée un très grand nombre de fois, les fréquences d'apparition ont tendance à **se stabiliser**. Ce constat est un résultat mathématique appelé « **loi des grands nombres** ».

Cette fréquence stabilisée est appelée **probabilité** de l'issue.

Par exemple, si je lance ma pièce 100 000 fois et que la fréquence de Pile est 0,40 je pourrai affirmer que cette pièce est très probablement truquée.

La plupart du temps, nous serons dans des situations **d'équiprobabilité**, c'est-à-dire dans lesquelles toutes les issues **ont la même probabilité**.

Ex : on lance un dé à 6 faces. S'il n'est pas truqué, la probabilité de chaque face est de $\frac{1}{6}$

Propriété : Soit A un événement dans une situation d'équiprobabilité. On a :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

Conséquences : pour tout événement A , on a $0 \leq p(A) \leq 1$

$p(\emptyset) = 0$ (événement **impossible**) et $p(\Omega) = 1$ (événement **certain**)

Ex : Une urne contient 10 boules identiques, indiscernables au toucher : trois vertes (V_1, V_2 et V_3), cinq blanches (de B_1 à B_5) et deux rouges (R_1 et R_2). On tire une de ces boules au hasard.

1° Quelle est la probabilité de l'événement B « La boule obtenue est blanche » ?

2° Quelle est la probabilité de l'événement C « La boule obtenue porte un numéro pair » ?

3° La boule tirée est verte. Quelle est alors la probabilité que ce soit la V_2 ?

$$1^\circ p(B) = \frac{5}{10} \text{ (5 boules favorables - les blanches - sur les 10 boules)}$$

$$2^\circ p(C) = \frac{4}{10} \text{ (4 boules favorables - les paires - sur les 10 boules)}$$

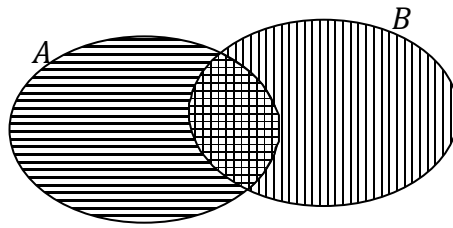
3° Si la boule est verte, alors le nombre total d'issues devient 3.

La probabilité que ce soit la V_2 est donc $\frac{1}{3}$ (c'est en fait une probabilité conditionnelle)

2° Propriétés

Propriété : Quels que soient les événements A et B , $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Preuve : faire une figure...



On constate que si l'on compte tout ce qui est dans A et tout ce qui est dans B , on compte **deux fois** la zone commune. Et cette zone commune est $A \cap B$. Autrement dit, si on compte cette zone deux fois, il faut la **soustraire** une fois pour retomber sur nos pieds !

Définition : Soient A et B deux événements. A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

Remarque : si A et B sont incompatibles alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propriété : lors d'une expérience aléatoire, la somme des probabilités de toutes les issues vaut **1**.

Ex : dans un paquet de carambars aux fruits, on en trouve à la fraise, au citron, à l'ananas et à l'orange. On prélève un carambar du paquet au hasard. Sachant que la probabilité qu'il soit à l'orange est de $\frac{1}{5}$, à la fraise $\frac{1}{3}$ et au citron $\frac{1}{6}$, quelle est la probabilité qu'on tombe sur un carambar à l'ananas ?

$$p(F) + p(C) + p(A) + p(O) = 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + p(A) + \frac{1}{6} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } p(A) &= 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{30}{30} - \frac{6}{30} - \frac{10}{30} - \frac{5}{30} \\ &= \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Propriété : pour tout événement A , on a $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Le passage par l'événement contraire pourra être utile pour calculer la probabilité d'événements « compliqués », car le contraire d'un événement compliqué est un événement simple ! Exemple en fin de chapitre...

3° Loi de probabilité

Donner la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est donner les probabilités de toutes les issues de l'univers.

Généralement, on la présente sous la forme d'un tableau.

Remarque : on sait déjà que la somme de toutes les probabilités doit être égale à **1...**

Ex : On lance un dé truqué dont la face 6 a 35% de chances d'apparaître. La face 1 n'a que 5% de chances d'apparaître, et les autres faces sont équiprobables.

1° Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2° On note A l'événement « Obtenir un résultat pair ». Calculer $p(A)$.

1° On sait que la somme des probabilités vaut 1.

$$1 - 0,35 - 0,05 = 0,60$$

$$0,60 : 4 = 0,15$$

D'où la loi de probabilité :

Faces	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,15	0,15	0,15	0,15	0,35

$$2^\circ p(A) = 0,15 + 0,15 + 0,35$$

$$= 0,65$$

III Arbres de probabilités

Lorsque plusieurs expériences se déroulent successivement, une modélisation à l'aide d'un arbre de probabilités peut être judicieuse. On parle aussi d'arbre pondéré.

Ex : Un forain possède deux roues (séparées en secteurs égaux) qu'un joueur doit faire tourner.

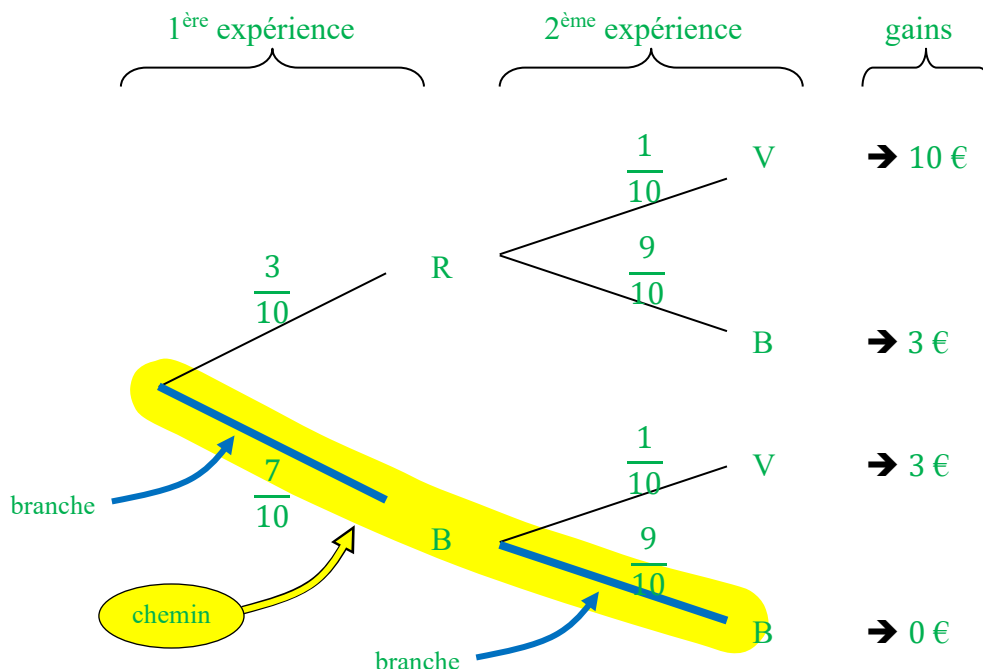
Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, sur la deuxième 1 secteur vert et 9 blancs.

Les gains sont distribués de la façon suivante :

- 10 € si les deux roues tombent sur les secteurs rouges et verts
- 3 € si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc
- 0 € si les deux roues tombent sur des secteurs blancs

Déterminer la loi de probabilité des gains.

On va représenter cette expérience aléatoire sous la forme d'un arbre de probabilités :



Règle n°1 : la probabilité d'un chemin s'obtient en multipliant les probabilités des branches qui le composent.

Le 1^{er} chemin correspond à l'événement « Rouge et Vert », c'est-à-dire $R \cap V$

$$p(R \cap V) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$

$$p(R \cap B) = \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{100}$$

$$p(V \cap V) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{7}{100}$$

$$p(V \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{63}{100}$$

Règle n°2 : lorsque deux chemins aboutissent à la même issue globale, leurs probabilités doivent être additionnées.

Ici, obtenir 3 € est présent sur deux chemins : $R \cap B$ et $B \cap V$

La probabilité de gagner 3 € est donc $\frac{27}{100} + \frac{7}{100} = \frac{34}{100}$

D'où la loi de probabilité suivie par les gains :

Gains	0	3	10
p_i	0,63	0,34	0,03

Remarque : la moyenne des gains est alors $0 \times 0,63 + 3 \times 0,34 + 10 \times 0,03 = 1,32$ €

Et si la partie coûte 1,50 €, le gain moyen devient $1,32 - 1,5 = -0,18$ (gain algébrique)

Complément : on lance une pièce de monnaie 10 fois de suite. On note A l'événement « On a obtenu au moins une fois Face au cours des 10 lancers ». Calculer $p(A)$.

A est un événement « compliqué » : on peut avoir obtenu 1 fois Face, ou 2 fois, ou 3 fois, ou 4...

En revanche, l'événement contraire est de ne jamais obtenir face, c'est-à-dire d'obtenir 10 fois pile !

$$p(\bar{A}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \quad (\text{imaginer un arbre})$$

$$\text{D'où } p(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024} \approx 0,9990$$

On a donc environ 99,9% de chances d'avoir au moins une fois Face au cours de 10 lancers successifs.