

# ÉQUATIONS & INÉQUATIONS

## I Résolution d'équations

### 0° Rappel : équations du 1<sup>er</sup> degré

« On ne change pas une égalité lorsqu'on fait la même opération à ses deux membres. »

Ex : résoudre l'équation  $2 - 3x = 2x - 7$

$$2 - 3x + 3x + 7 = 2x - 7 + 3x + 7 \Rightarrow 9 = 5x$$

$$\frac{9}{5} = \frac{5x}{5} \Rightarrow \frac{9}{5} = x$$

De manière pratique, on peut aller bien plus vite :

1. Regrouper les inconnues d'un même côté : changer un terme de côté change son signe
2. Isoler le  $x$  en effectuant une division (sans changer le signe du coefficient !)

Ex : résoudre l'équation  $4x + 11 = 7x - 4$

$$11 + 4 = 7x - 4x$$

$$15 = 3x$$

$$\frac{15}{3} = x \text{ c'est-à-dire } 5 = x$$

### 1° Equations produit

Définition : on appelle équation produit toute équation de la forme  $P(x) \times Q(x) = 0$  où  $P(x)$  et  $Q(x)$  sont des expressions algébriques.

Propriété : Un produit de facteurs est nul si l'un (au moins) de ses facteurs est nul.

Ainsi, si  $P(x) \times Q(x) = 0$ , alors  $P(x) = 0$  ou  $Q(x) = 0$ .

Méthode : 1. Se ramener à « ... = 0 »

2. Factoriser l'expression obtenue

Ex 1 : résoudre l'équation  $6x^2 = 4x$

$$6x^2 - 4x = 0$$

$$x(6x - 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 6x - 4 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 6x = 4$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ex 2 : résoudre l'équation  $(3 - 2x)(x - 5) - (3x - 7)(3 - 2x) = 0$

$$(3 - 2x)((x - 5) - (3x - 7)) = 0$$

$$(3 - 2x)(x - 5 - 3x + 7) = 0$$

$$(3 - 2x)(-2x + 2) = 0$$

$$3 - 2x = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + 2 = 0$$

$$3 = 2x \quad \text{ou} \quad 2 = 2x$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{2} = 1$$

Ex 3 : résoudre l'équation  $25x^2 - (5 - 3x)^2 = 0$

$$25x^2 - (5 - 3x)^2 = 0$$

$$(5x)^2 - (5 - 3x)^2 = 0$$

$$(5x - (5 - 3x))(5x + (5 - 3x)) = 0$$

$$(5x - 5 + 3x)(5x + 5 - 3x) = 0$$

$$(8x - 5)(2x + 5) = 0$$

$$8x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 5 = 0$$

$$8x = 5 \quad \text{ou} \quad 2x = -5$$

$$x = \frac{5}{8} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5}{2}$$

## 2° Equation du type $x^2 = a$

Propriété : Si  $a < 0$ , l'équation  $x^2 = a$  n'a pas de solutions.

Si  $a = 0$ , l'équation  $x^2 = a$  a une seule solution qui est  $x = 0$ .

Si  $a > 0$ , l'équation  $x^2 = a$  possède deux solutions :  $x = \sqrt{a}$  et  $x = -\sqrt{a}$ .

Preuve : Si  $a < 0$ , il n'y a pas de solutions car un carré est toujours positif.

Si  $a = 0$ , l'équation devient  $x^2 = 0$  donc  $x = 0$ .

Si  $a > 0$ , alors  $x^2 = a$  devient  $x^2 - a = 0$

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

D'où  $x - \sqrt{a} = 0$  ou  $x + \sqrt{a} = 0$

$$x = \sqrt{a} = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}$$

Ex 1 : Résoudre l'équation  $3x^2 = 48$

$$x^2 = \frac{48}{3} = 16$$

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

Ex 2 : Résoudre l'équation  $5x^2 = -3$

$$x^2 = \frac{-3}{5} : \text{impossible (pas de solutions)}$$

Ex 3 : Résoudre l'équation  $(5 - 3x)^2 = 9$

Il y a deux solutions :

$$5 - 3x = \sqrt{9} \quad \text{ou} \quad 5 - 3x = -\sqrt{9}$$

$$5 - 3x = 3 \quad \text{ou} \quad 5 - 3x = -3$$

$$-3x = 3 - 5 \quad \text{ou} \quad -3x = -3 - 5$$

$$x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$$

### 3° Equations quotient

Définition : on appelle équation quotient toute équation de la forme  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  où  $P(x)$  et  $Q(x)$

sont des expressions algébriques, avec  $Q(x) \neq 0$ .

Propriété : Un quotient est nul si son numérateur est nul.

Autrement dit,  $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$  si et seulement si  $P(x) = 0$ .



Il faut commencer par vérifier que  $Q(x) \neq 0$ .

C'est ce qu'on appelle les valeurs interdites.

Ex 1 : Résoudre l'équation  $\frac{(3x - 5)(7 - x)}{4 + x} = 0$

Valeurs interdites :  $4 + x = 0$

$$x = -4$$

Il faut ensuite résoudre  $(3x - 5)(7 - x) = 0$

$$3x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 7 - x = 0$$

$$3x = 5 \quad \text{ou} \quad 7 = x$$

$$x = \frac{5}{3} \quad \text{ou} \quad x = 7$$

Ex 2 : Résoudre l'équation  $\frac{9x^2 - 36}{x - 2} = 0$

Valeurs interdites :  $x - 2 = 0$

$$x = 2$$

Il faut ensuite résoudre  $9x^2 - 36 = 0$

$$(3x - 6)(3x + 6) = 0$$

$$3x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x + 6 = 0$$

$$3x = 6 \quad \text{ou} \quad 3x = -6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-6}{3} = -2$$

Or, il faut que  $x \neq 2$  donc la seule solution est  $x = -2$ .

Remarque :  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  peut se résoudre en faisant  $A \times D = B \times C$

## **II Résolution d'inéquations**

### **0° Rappel : inéquations du 1<sup>er</sup> degré**

Résoudre une inéquation du 1<sup>er</sup> degré fonctionne de la même manière qu'une équation mais si l'on multiplie / divise par un nombre négatif, il faut inverser le sens de l'inégalité.

Ex : Résoudre  $-2x > 8$

$$x < \frac{8}{-2} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x < -4$$

⇒ Il est possible de l'éviter :  $-2x > 8$  devient  $-8 > 2x$  en changeant les termes de côté...

Ex : Résoudre l'inéquation :  $2x - 3 \leq 7x + 12$

$$2x - 7x \leq 12 + 3$$

$$-3 - 12 \leq 7x - 2x$$

$$-5x \leq 15$$

$$-15 \leq 5x$$

$$x \geq \frac{15}{-5}$$

$$\frac{-15}{5} \leq x$$

$$x \geq -3$$

$$-3 \leq x$$



Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise par une quantité, bien s'assurer qu'on connaît son signe...

Si la quantité est négative, il faut inverser le sens de l'inégalité. Et si l'on ne sait pas quel est son signe (lorsqu'il y a des lettres par exemple), ne pas faire...

Ex :  $\frac{9}{2x - 5} \leq 3$  ne devient pas  $9 \leq 3(2x - 5)$  car on ne connaît pas le signe de  $(2x - 5)$

## 1° Tableau de signes d'une fonction affine

On souhaite déterminer le signe d'une fonction affine  $f(x) = mx + p$ .

$mx + p > 0$  devient  $mx > -p$  puis tout dépend du signe de  $m$  : s'il est positif, tout va bien mais s'il est négatif, il faudra changer le sens de l'inégalité...

⇒ En pratique, on va résoudre  $mx + p = 0$  puis adapter en fonction du signe de  $m$ .

Ex 1 : déterminer le signe de  $3x + 5$ .

$$3x + 5 = 0$$

$$3x = -5$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

|          |           |                |           |
|----------|-----------|----------------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $-\frac{5}{3}$ | $+\infty$ |
| $3x + 5$ | $-$       | $0$            | $+$       |

⇒ La fonction affine  $f(x) = 3x + 5$  a pour coefficient directeur  $3 > 0$  (le coefficient de «  $x$  ») donc ses valeurs sont croissantes : d'abord négatives puis positives.

Ex 2 : déterminer le signe de  $2 - 5x$

$$2 - 5x = 0$$

$$2 = 5x$$

$$\frac{2}{5} = x$$

|          |           |               |           |
|----------|-----------|---------------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $\frac{2}{5}$ | $+\infty$ |
| $2 - 5x$ | $+$       | $0$           | $-$       |

⇒ La fonction affine  $f(x) = 2 - 5x$  a pour coefficient directeur  $-5 < 0$  (le coefficient de «  $x$  ») donc ses valeurs sont décroissantes : d'abord positives puis négatives.

## 2° Généralisation

Méthode : 1. Se ramener à  $f(x) \geq 0$  ou  $f(x) \leq 0$

2. Factoriser l'expression  $f(x)$

3. Faire un tableau de signes, avec une ligne par facteur de  $f(x)$

4. Compléter la dernière ligne du tableau (règle des signes d'un produit)

5. Lire dans la dernière ligne du tableau les solutions de l'inéquation

Ex 1 : Résoudre  $(2x - 1)(-3x - 2) > 0$

On commence par résoudre  $2x - 1 = 0$  et  $-3x - 2 = 0$

$$2x = 1 \quad \text{et} \quad -2 = 3x$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-2}{3} = x$$

| $x$                 | $-\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |     |
|---------------------|-----------|----------------|---------------|-----------|-----|
| $2x - 1$            | $-$       |                | $0$           | $+$       |     |
| $-3x - 2$           | $+$       | $0$            | $-$           | $-$       |     |
| $(2x - 1)(-3x - 2)$ | $-$       | $0$            | $+$           | $0$       | $-$ |

Donc  $x \in \left] -\frac{2}{3} ; \frac{1}{2} \right[$ .

Ex 2 : 1° Vérifier que  $6x^2 - 7x - 20 = (2x - 5)(4 + 3x)$

2° Résoudre l'inéquation  $8x^2 - 12x + 5 \geq 2x^2 - 5x + 25$

$$\begin{aligned} 1^\circ (2x - 5)(4 + 3x) &= 8x + 6x^2 - 20 - 15x \\ &= 6x^2 - 7x - 20 \end{aligned}$$

$$2^\circ 8x^2 - 12x + 5 \geq 2x^2 - 5x + 25$$

$$8x^2 - 12x + 5 - 2x^2 + 5x - 25 \geq 0$$

$$6x^2 - 7x - 20 \geq 0$$

$$(2x - 5)(4 + 3x) \geq 0 \quad \text{d'après } 1^\circ$$

On commence par résoudre  $2x - 5 = 0$  et  $4 + 3x = 0$

$$2x = 5 \quad \text{et} \quad 3x = -4$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x = -\frac{4}{3}$$

| $x$                | $-\infty$ | $-\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |     |
|--------------------|-----------|----------------|---------------|-----------|-----|
| $2x - 5$           | $-$       |                | $0$           | $+$       |     |
| $4 + 3x$           | $-$       | $0$            | $+$           | $+$       |     |
| $(2x - 5)(4 + 3x)$ | $+$       | $0$            | $-$           | $0$       | $+$ |

Donc  $x \in \left] -\infty ; -\frac{4}{3} \right] \cup \left[ \frac{5}{2} ; +\infty \right[$ .

Ex 3 : Résoudre l'inéquation  $\frac{3}{4x - 1} \geq \frac{1}{3 - 2x}$

$$\frac{3}{4x - 1} - \frac{1}{3 - 2x} \geq 0$$

$$\frac{3(3 - 2x) - (4x - 1)}{(4x - 1)(3 - 2x)} \geq 0$$

$$\frac{9 - 6x - 4x + 1}{(4x - 1)(3 - 2x)} \geq 0$$

$$\frac{-10x + 10}{(4x - 1)(3 - 2x)} \geq 0$$

$$-10x + 10 = 0$$

$$4x - 1 = 0$$

$$3 - 2x = 0$$

$$10 = 10x$$

$$4x = 1$$

$$3 = 2x$$

$$x = \frac{10}{10} = 1$$

$$x = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$x = \frac{3}{2} = 1,5$$

| $x$                                | $-\infty$ | 0,25 | 1 | 1,5 | $+\infty$ |   |
|------------------------------------|-----------|------|---|-----|-----------|---|
| $-10x + 10$                        | +         | +    | 0 | -   | -         |   |
| $4x - 1$                           | -         | 0    | + | +   | +         |   |
| $2 - 3x$                           | +         | +    | + | 0   | -         |   |
| $\frac{-2x - 5}{(3x + 2)(4x - 1)}$ | -         |      | + | 0   |           | + |

Donc  $x \in ]0,25 ; 1] \cup ]1,5 ; +\infty[$ .

Ex 4 : Résoudre l'inéquation  $\frac{9}{2x - 5} \leq 3$

$$0 \leq 3 - \frac{9}{2x - 5}$$

$$0 \leq \frac{3(2x - 5) - 9}{2x - 5}$$

$$0 \leq \frac{6x - 15 - 9}{2x - 5}$$

$$0 \leq \frac{6x - 24}{2x - 5}$$

| $x$                      | $-\infty$ | 2,5 | 4 | $+\infty$ |   |
|--------------------------|-----------|-----|---|-----------|---|
| $6x - 24$                | -         | -   | 0 | +         |   |
| $2x - 5$                 | -         | 0   | + | +         |   |
| $\frac{6x - 24}{2x - 5}$ | +         |     | - | 0         | + |

Donc  $x \in ]-\infty ; 2,5] \cup [4 ; +\infty[$ .



$\frac{A}{B} \leq \frac{C}{D}$  ne peut pas se résoudre en faisant  $A \times D \leq B \times C$