

DROITES

I Equation cartésienne d'une droite

1° Définition & exemples

Définition : On appelle vecteur directeur d'une droite (d) tout vecteur (non nul) dont la direction est celle de (d) .

Remarque : Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

Propriété : Toute droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.

Et un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Preuve : Soient $A(x_A ; y_A)$ un point de (d) et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (d) .

$M(x ; y) \in (d)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Autrement dit, $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (x - x_A) \times \beta - (y - y_A) \times \alpha = 0$

$$\beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0$$

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_A - \beta x_A = 0$$

On a bien une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$ et $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$.

Et ainsi, $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ peut aussi s'écrire $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Définition : L'équation $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (d) .

Ex 1 : un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ex 2 : déterminer une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par $A(5 ; -2)$.

Méthode 1 : $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d) donc $-b = -3$ et $a = 4$

Une équation cartésienne de (d) est donc $4x + 3y + c = 0$.

Or, (d) passe par A donc $4 \times 5 + 3 \times (-2) + c = 0$

$$20 - 6 + c = 0$$

$$14 + c = 0 \text{ et donc } c = -14$$

Une équation cartésienne de (d) est donc $4x + 3y - 14 = 0$.

Méthode 2 : Soit $M(x ; y)$ un point de (d) . $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-5 \\ y+2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (x-5) \times 4 - (y+2) \times (-3) = 0$$

$$4x - 20 + 3y + 6 = 0$$

$$4x + 3y - 14 = 0$$

Ex 3 : Soient $A(-4 ; 3)$ et $B(2 ; -6)$. Déterminer une équation de la droite (AB) .

Commençons par les coordonnées d'un vecteur directeur de cette droite :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - (-4) \\ -6 - 3 \end{pmatrix} \text{ c'est à dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

On peut prendre ce vecteur ou bien tout vecteur qui lui est **colinéaire**. En l'occurrence, on peut prendre

$$\vec{u} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \text{ c'est à dire } \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On a alors $-b = 2$ et $a = -3$ et donc $(AB) : -3x - 2y + c = 0$.

On utilise ensuite le point A (ou le point B) : $-3 \times (-4) - 2 \times 3 + c = 0$

$$12 - 6 + c = 0$$

$$6 + c = 0$$

$$c = -6$$

Une équation de (AB) est donc $-3x - 2y - 6 = 0$.

Et bien évidemment, on peut prendre comme équation $3x + 2y + 6 = 0$ en multipliant par -1 .

$\Rightarrow$ Pour savoir si $C(-3 ; 1)$ est sur (AB) , il suffit de remplacer x et y par les coordonnées de

$$C : 3 \times (-3) + 2 \times 1 + 6 = -9 + 2 + 6$$

$$= -1 \neq 0$$

Donc $C \notin (AB)$.

Remarques :

$\Rightarrow$ Si $a = 0$, l'équation cartésienne devient $y = k$: droite parallèle à l'axe des abscisses.

Logique car un vecteur directeur est alors $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Si $b = 0$, l'équation cartésienne devient $x = k$: droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Logique car un vecteur directeur est alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La réciproque de la propriété énoncée précédemment est vraie : si a, b et c sont des réels tels que $(a ; b) \neq (0 ; 0)$ alors l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant $ax + by + c = 0$ est une droite.

2° Représentation graphique

Pour tracer une droite (d) dont on connaît l'équation cartésienne, il suffit d'un point de (d) et d'un vecteur directeur.

Ex : tracer les droites suivantes :

$$(d_1) : 2x - 3y + 6 = 0$$

Vecteur directeur : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

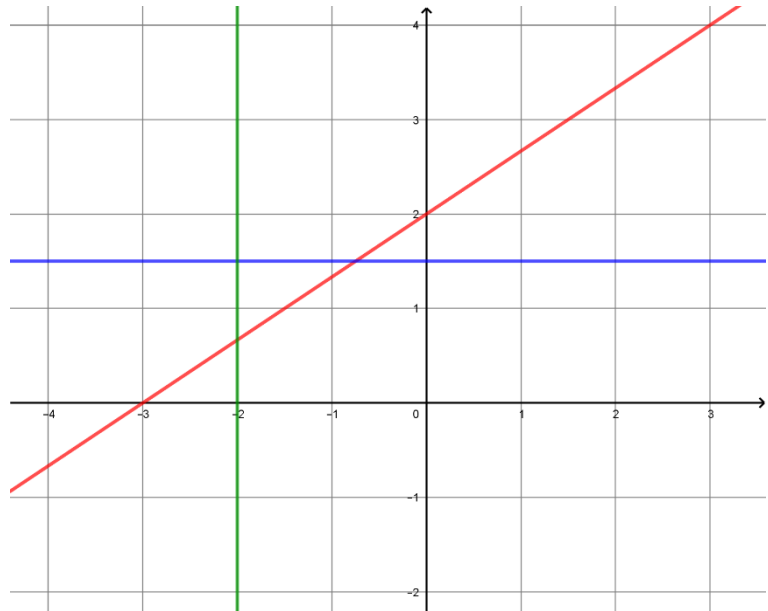
Avec $x = 0$ par exemple, on a :

$$-3y + 6 = 0$$

$$6 = 3y$$

$$2 = y$$

On place donc le point $(0 ; 2)$



$$(d_2) : 2y - 3 = 0$$

$$(d_3) : 3x + 6 = 0$$

$a = 0$ donc (d_2) est **horizontale**

$b = 0$ donc (d_3) est **verticale**

$$2y = 3 \text{ et donc } y = 1,5$$

$$3x = -6 \text{ et donc } x = -2$$

3° Positions relatives

Lorsqu'on parle de « positions relatives » de deux droites, on souhaite savoir comment elles se situent l'une par rapport à l'autre : sont-elles sécantes ou parallèles ?

Deux droites sont parallèles (ou confondues) si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Et sinon, elles sont sécantes.

Ex : Les droites $(d_1) : 7,5x + 4,5y - 8 = 0$ et $(d_2) : -5x - 3y + 6 = 0$ sont-elles parallèles ?

Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} -4,5 \\ 7,5 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_1 ; \vec{u}_2) &= (-4,5) \times (-5) - 7,5 \times 3 \\ &= 22,5 - 22,5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(d_1) // (d_2)$.

Remarques : 1. On pourrait vérifier (d_1) et (d_2) ne sont pas **confondues** : (d_2) passe par $(0 ; 2)$, et ce n'est pas le cas pour (d_1) ...

2. Lorsque deux droites sont sécantes, il peut être intéressant de déterminer **leur point**

d'intersection : cela se fera par la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues (*dans un*

prochain chapitre).

II Equation réduite d'une droite

1° Définition

Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

$\Rightarrow$ Si $b \neq 0$ alors $by = -ax - c$

$$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Autrement dit, on obtient une équation de la forme $y = mx + p$ (fonction affine !)

$\Rightarrow$ Si $b = 0$ alors $ax = -c$

$$x = \frac{-c}{a}$$

Autrement dit, on obtient une équation de la forme $x = k$.

Définition : Soit (d) une droite du plan.

Si (d) est **verticale**, son équation réduite est $x = k$ où $k \in \mathbb{R}$

Et sinon, son équation réduite est $y = mx + p$ où $(m, p) \in \mathbb{R}^2$

- m est le coefficient directeur de (d) (ou sa pente)
- p est l'ordonnée à l'origine de (d)

Ex : donner l'équation réduite de la droite d'équation cartésienne $3x + 2y - 8 = 0$

$$2y = -3x + 8$$

$$y = \frac{-3}{2}x + \frac{8}{2} = -1,5x + 4$$

$\Rightarrow$ Le coefficient directeur est $-1,5$ et l'ordonnée à l'origine est 4 .

Propriété : Soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts d'une droite (d) avec $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de (d) est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Preuve : On a $y_B = mx_B + p$ et $y_A = mx_A + p$ car A et B sont des points de (d) .

D'où $y_B - y_A = mx_B + p - (mx_A + p)$

$$y_B - y_A = mx_B + p - mx_A - p$$

$$y_B - y_A = m(x_B - x_A)$$

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

Remarque : on retrouve la formule du coefficient directeur d'une fonction affine $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Ex : Déterminer l'équation de la droite (GH) avec G(2 ; -5) et H(-3 ; 4).

$$m = \frac{4 - (-5)}{-3 - 2} = \frac{9}{-5} = -1,8$$

D'où (GH) : $y = -1,8x + p$

On remplace ensuite avec les coordonnées de G : $-5 = -1,8 \times 2 + p$

$$-5 = -3,6 + p$$

$$p = -5 + 3,6 = -1,4$$

D'où (GH) : $y = -1,8x - 1,4$

2° Représentation graphique

Prenons une droite d'équation réduite $y = mx + p$

- Le coefficient directeur m (c'est-à-dire $\frac{m}{1}$)

Il correspond à un déplacement de m unités en ordonnées pour 1 unité en abscisses.

- L'ordonnée à l'origine p

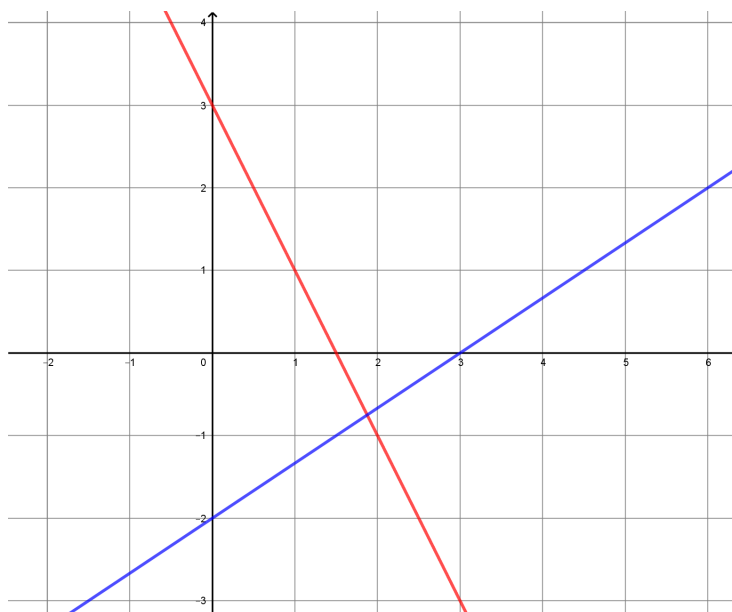
Elle porte bien son nom car, si l'on se place à l'origine c'est-à-dire lorsque $x = 0$, alors $y = p$.

Autrement dit, la droite passe par le point $(0 ; p)$.

Ex : Tracer les droites (d_1) et (d_2) d'équations respectives $y = -2x + 3$ et $y = \frac{2}{3}x - 2$

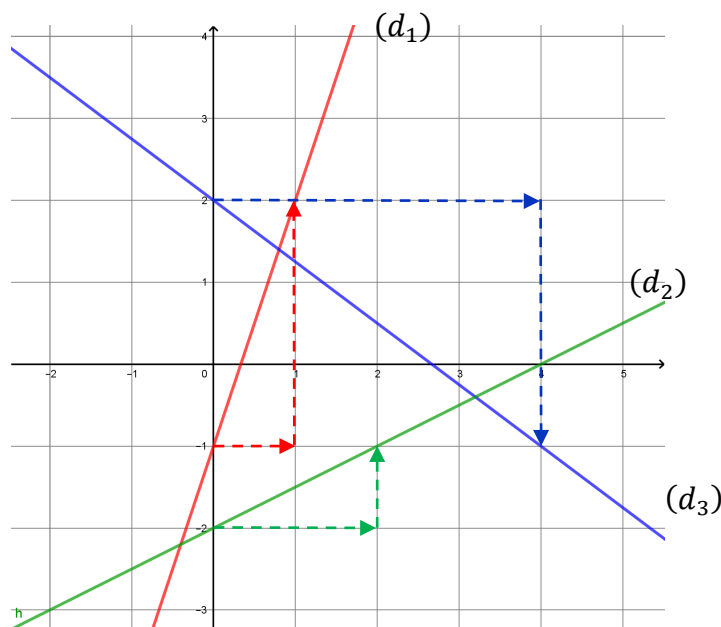
(d_1) passe par $(0 ; 3)$. Et son coefficient directeur est -2 ce qui signifie qu'elle descend de deux unités en ordonnées pour une unité en abscisses.

(d_2) passe par $(0 ; -2)$. Et son coefficient directeur est $\frac{2}{3}$ ce qui signifie qu'elle monte de deux unités en ordonnées pour trois unités en abscisses.



Réciproquement, il est possible de lire l'équation réduite d'une droite lorsque celle-ci coupe l'axe des ordonnées à un endroit lisible (ordonnée à l'origine) et qu'elle passe par les nœuds du quadrillage (pour pouvoir lire son coefficient directeur)

Ex : déterminer les équations réduites des droites suivantes par lecture graphique :



$$(d_1) : y = 3x - 1$$

$$(d_2) : y = \frac{1}{2}x - 2$$

$$(d_3) : y = -\frac{3}{4}x + 2$$

3° Positions relatives

Deux droites sont parallèles (ou confondues) si elles ont le même coefficient directeur

(ou si elles sont toutes les deux parallèles à l'axe des ordonnées)

Et sinon, elles sont sécantes.

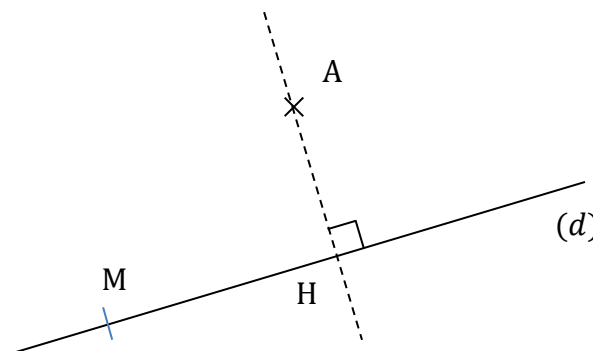
III Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soient (d) une droite et M un point du plan.

Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est

le point d'intersection de (d) avec la perpendiculaire à

(d) passant par A.



Propriété : Le projeté orthogonal H du point A sur la droite (d) est le point de (d) le plus proche du point A.

Autrement dit, pour tout point M de (d) , $AH \leq AM$.

Preuve : Soit M un point quelconque de (d) .

D'après le théorème de Pythagore, on a $AM^2 = AH^2 + HM^2$

Or, si $M \neq H$ alors $HM^2 > 0$

$$AH^2 + HM^2 > AH^2$$

$$AM^2 > AH^2$$

$$AM > AH$$

Ainsi, H est bien le point de (d) le plus proche du point A.

⇒ Dans un triangle, le projeté d'un sommet sur le côté opposé permet d'obtenir la hauteur issue de ce sommet.

Ex : Une rivière est traversée par deux ponts (notés O et F). Depuis sa maison (notée B), Boris doit parcourir 4,5 km pour aller au pont O et 6 km pour aller au pont F. Le triangle BOF est rectangle en B. A quelle distance de la rivière Boris habite-t-il ?

La distance entre B et la rivière s'obtient en effectuant

Le projeté orthogonal H de B sur (OF).

On peut calculer l'aire du triangle BOF de deux manières :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \mathcal{A}_{\text{BOF}} &= \frac{BO \times BF}{2} \\ &= \frac{4,5 \times 6}{2} = 13,5 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \mathcal{A}_{\text{BOF}} = \frac{OF \times BH}{2}$$

Or, d'après le théorème de Pythagore :

$$OF^2 = BO^2 + BF^2$$

$$= 4,5^2 + 6^2$$

$$= 20,25 + 36$$

$$= 56,25$$

$$OF = \sqrt{56,25} = 7,5$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}_{\text{BOF}} = \frac{7,5 \times BH}{2} = 3,75 \times BH$$

$$\text{Donc } 13,5 = 3,75 \times BH$$

$$\frac{13,5}{3,75} = BH$$

$$3,6 = BH$$

