

VECTEURS

2^{ème} partie

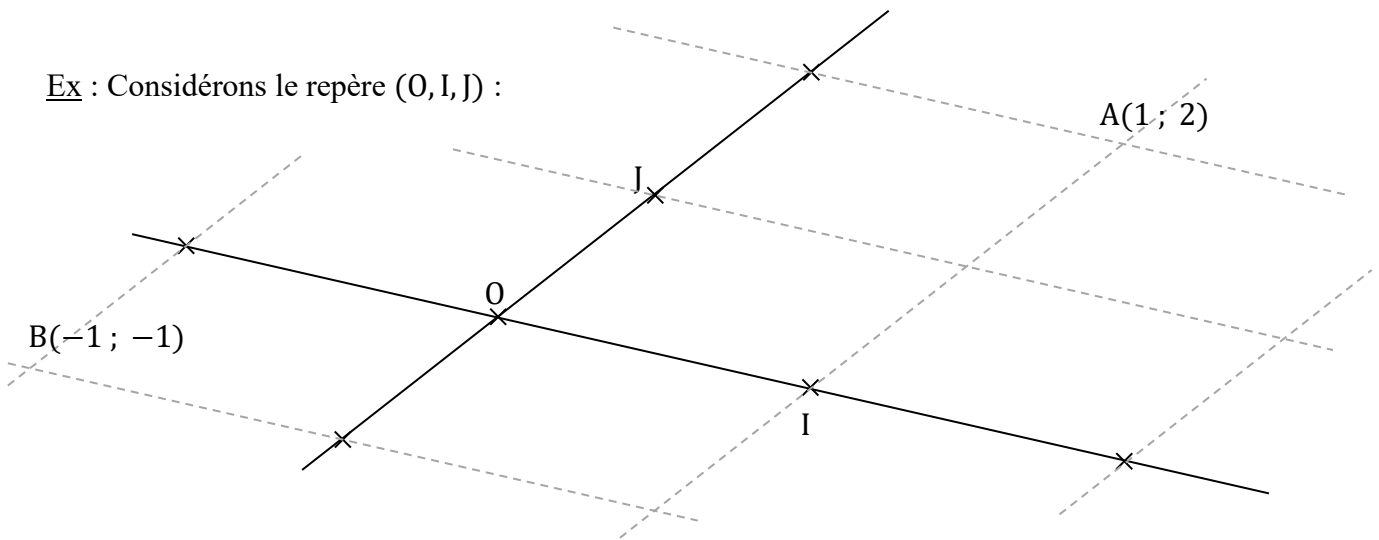
I Repère du plan

Pour déterminer les coordonnées d'un point, on utilise un repère du plan composé d'une origine, d'un axe des abscisses gradué et d'un axe des ordonnées gradué.

Ainsi, trois points non alignés définissent un repère :

- la 1^{ère} lettre désigne l'origine
- la 2nde lettre désigne l'unité de l'axe des abscisses
- la 3^{ème} lettre désigne l'unité de l'axe des ordonnées.

Ex : Considérons le repère (O, I, J) :



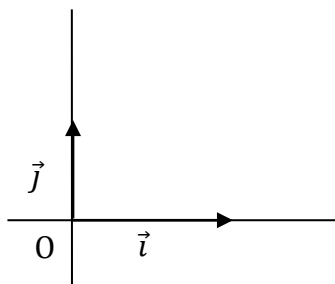
(OI) est l'axe des abscisses, et I correspond au nombre « 1 » de cet axe

(OJ) est l'axe des ordonnées, et J correspond au nombre « 1 » de cet axe

Et si on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$, ce repère peut alors se noter (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

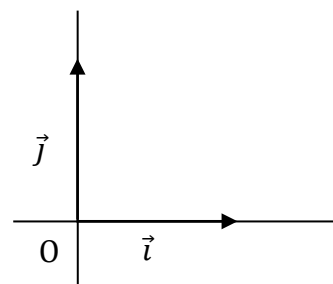
Définition : On appelle repère du plan tout triplet (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.

Repère orthogonal



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires

Repère orthonormé



$\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires

et la même norme

II Coordonnées d'un vecteur

Définition : Soit M un point quelconque d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ sont les coordonnées du point M.

On note généralement les coordonnées d'un vecteur en colonne.

Propriété : soient $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Attention : un vecteur a un sens ! L'ordre dans le calcul est donc fondamental : il faut bien faire l'opération « arrivée – départ ».

Ex : $A(-2 ; 4)$, $B(3 ; 1)$ et $C(-5 ; -1)$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{CA}$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 1 - 4 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

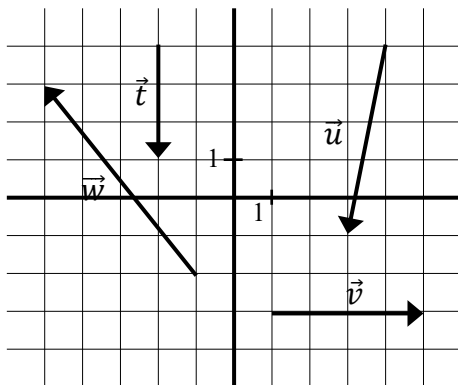
$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 - 3 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -2 - (-5) \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées d'un vecteur indiquent son action dans les directions des deux axes.

Par exemple, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ signifie que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ engendre un déplacement de 5 unités dans le sens du vecteur $\vec{i}$ sur l'axe des abscisses, et de 3 unités dans le sens opposé du vecteur $\vec{j}$ sur l'axe des ordonnées.

Ex : lire directement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$



$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Propriété : deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées

Ex 1 : Soient $A(-2 ; -1), B(0 ; 3), C(5 ; 2)$ et $D(3 ; -2)$. Montrer que ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 2 - (-2) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$: ABCD est un parallélogramme.

Ex 2 : Soient $E(2 ; -1), F(1 ; 4)$ et $G(-3 ; 2)$. Déterminer les coordonnées du point H tel que EFGH soit un parallélogramme.

On note $H(x ; y)$. EFGH sera un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$

$$\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Par ailleurs, } \overrightarrow{GH} \begin{pmatrix} x - (-3) \\ y - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On doit donc avoir } \begin{cases} x + 3 = 1 \\ y - 2 = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = -5 + 2 = -3 \end{cases}$$

Donc $H(-2 ; -3)$.

Propriétés : soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Et notamment, le vecteur $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

Ex : soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Déterminer les coordonnées du vecteur $3\vec{u} - 2\vec{v}$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 2 - 2 \times (-3) \\ 3 \times (-5) - 2 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} 6 + 6 \\ -15 - 12 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \end{pmatrix}$$

III Compléments

1° Coordonnées du milieu d'un segment

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Ex : Soient G(2 ; -2) et H(-3 ; 5). Déterminer les coordonnées du milieu K de [GH].

$$K\left(\frac{2-3}{2} ; \frac{-2+5}{2}\right)$$

$$K\left(\frac{-1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$$

2° Distance dans un repère orthonormé

Soient A et B deux points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore.

Ex : Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soient A(2 ; 3), B(-1 ; 2) et C(4 ; -3) trois points.

1° Calculer AB.

2° Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$1^\circ AB^2 = (-1 - 2)^2 + (2 - 3)^2$$

$$= (-3)^2 + (-1)^2$$

$$= 9 + 1$$

$$= 10$$

$$\text{Donc } AB = \sqrt{10}$$

$$2^\circ BC^2 = (4 - (-1))^2 + (-3 - 2)^2$$

$$= 5^2 + (-5)^2$$

$$= 25 + 25$$

$$= 50$$

$$CA^2 = (2 - 4)^2 + (3 - (-3))^2$$

$$= (-2)^2 + 6^2$$

$$= 4 + 36$$

$$= 40$$

Donc $AB^2 + CA^2 = BC^2$: le triangle ABC est rectangle en A.

Propriété : Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$$

Ex : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\|^2 = (-2)^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$

Si $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{AB}\|^2 = 3^2 + (-4)^2 = 9 + 16 = 25$ donc $\|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{25} = 5$

IV Colinéarité de deux vecteurs

Définition : soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

Ex : calculer le déterminant des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\vec{u} ; \vec{v}) &= 2 \times 6 - (-3) \times (-5) \\ &= 12 - 15 \\ &= -3\end{aligned}$$

Rappel : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Propriété : soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$.

Preuve : si l'un des deux vecteurs est nul, c'est évident : tout vecteur est colinéaire à $\vec{0}$ et $xy' - yx'$ vaut nécessairement 0.

Supposons donc que les deux vecteurs sont non nuls.

($\Rightarrow$) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

On a donc $x = kx'$ et $y = ky'$.

$$\text{D'où } k = \frac{x}{x'} \text{ et } k = \frac{y}{y'}$$

Par conséquent, on a $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ et donc $xy' = yx'$

Ainsi, on a $xy' - yx' = 0$ c'est-à-dire $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = 0$.

($\Leftarrow$) Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u} ; \vec{v}) = xy' - yx' = 0$

On a alors $xy' = yx'$ et donc $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$

Posons $k = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$: le vecteur $k\vec{v}$ a alors pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$.

Or, $kx' = \frac{x}{x'}x' = x$ et $ky' = \frac{y}{y'}y' = y$

Ainsi, $k\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ce qui signifie que $k\vec{v} = \vec{u}$: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc bien colinéaires.

Ex : 1° Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

2° Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$$\begin{aligned} 1^\circ \det(\vec{u} ; \vec{v}) &= 14 \times 9 - 21 \times 6 \\ &= 126 - 126 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2° On observe que $\vec{v} = -2\vec{u}$: on peut donc dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Question : quel est alors la valeur de k lorsque les vecteurs sont colinéaires... ?

k est le rapport de proportionnalité entre les vecteurs donc $k = \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$

Reprenons l'exemple des vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 14 \\ 21 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ dont on a montré qu'ils sont colinéaires.

$$\frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ donc } \vec{u} = \frac{7}{3} \vec{v} \text{ (ou bien } \vec{v} = \frac{3}{7} \vec{u} \text{)}$$

⇒ Cela donne une autre manière de vérifier si deux vecteurs sont ou non colinéaires : il suffit de calculer les rapports $\frac{x}{x'}$ et $\frac{y}{y'}$: s'ils sont égaux, les vecteurs sont colinéaires !

Rappelons la propriété suivante :

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow (AB) // (CD)$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow A, B, C \text{ alignés}$$

Ex : Démontrer que les points Z(-2 ; 3), U(1 ; 1) et T(5,5 ; -2) sont alignés.

$$\overrightarrow{ZU} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{ZU} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{ZT} \begin{pmatrix} 5,5 - (-2) \\ -2 - 3 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{ZT} \begin{pmatrix} 7,5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{ZU} ; \overrightarrow{ZT}) &= 3 \times (-5) - (-2) \times 7,5 \\ &= -15 + 15 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les points Z, U et T sont donc alignés.