

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Il s'agit de fonctions étudiées pour leur exemplarité / leur utilité dans de nombreuses situations, ou parce qu'elles permettent par la suite d'étudier des familles de fonctions plus complexes.

L'une de ces familles de fonctions a été étudiée au collège : il s'agit des fonctions affines (fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$) Nous en reparlerons dans un prochain chapitre.

I Fonctions puissances

1° Fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

par $f(x) = x^2$

Traçons sa représentation graphique :

-3	-2	-1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

Remarques :

1. La courbe représentative de la fonction carré est appelée « parabole ».
2. Dans un repère orthogonal, elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Ex : 1. Graphiquement, résoudre $2x^2 - 7 = 11$

2. Graphiquement, résoudre $x^2 > 16$

1. On a $2x^2 - 7 = 11$

$$2x^2 = 11 + 7$$

$$2x^2 = 18$$

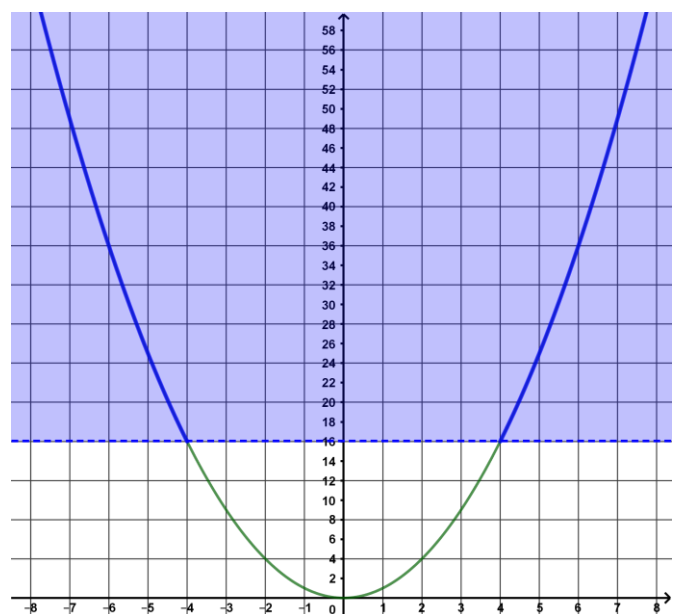
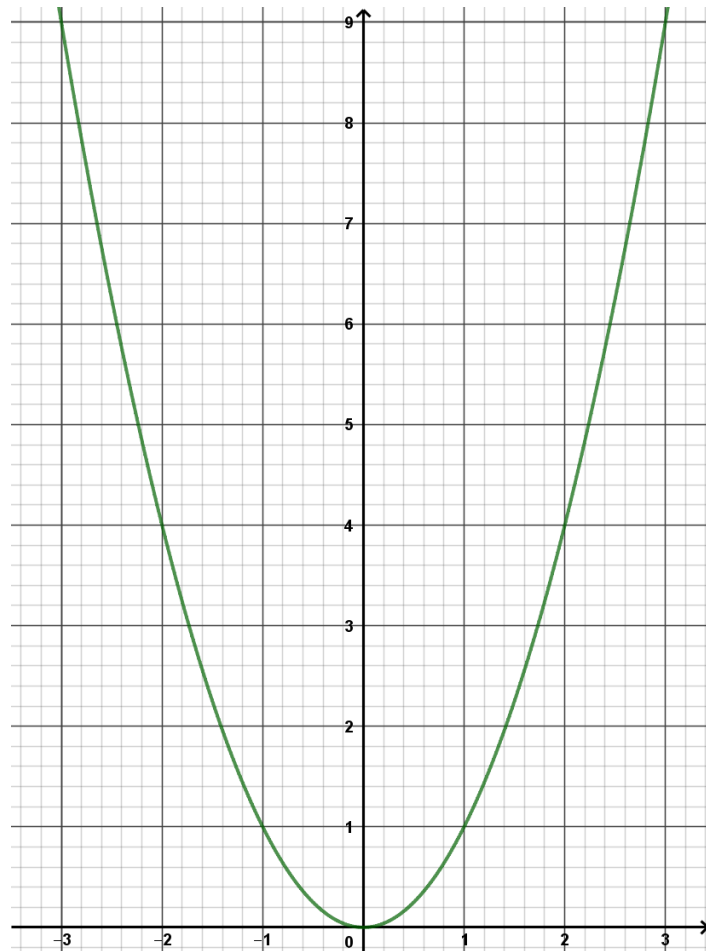
$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

Graphiquement, on obtient deux solutions :

$$x = 3 \text{ et } x = -3.$$

2. On obtient :

$$x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$$



2° Fonction cube

La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

Traçons sa représentation graphique :

-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
-8	-1	-0,125	0	-0,125	1	8

Remarque : dans un repère orthogonal, sa courbe est **symétrique** par rapport à l'origine du repère.

Comparaison : on cherche à comparer les valeurs de x , x^2 et x^3 lorsque x est positif.

Si $x \geq 1$, la courbe d'équation $y = x^3$ est **au-dessus** de celle de $y = x^2$ qui est elle-même **au-dessus** de celle de $y = x$.

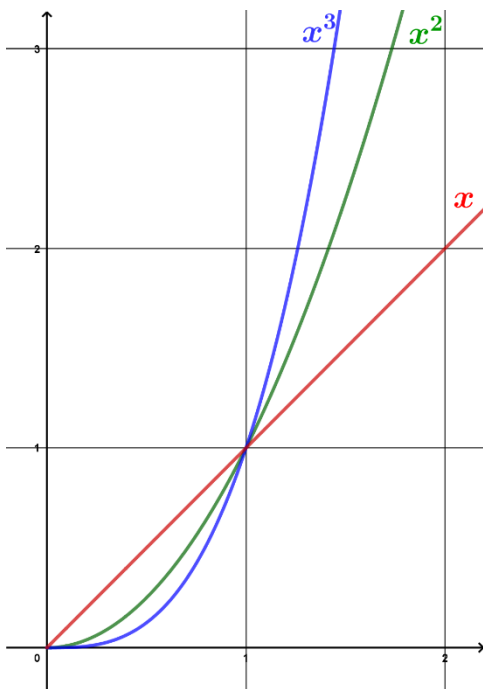
Et si $0 \leq x \leq 1$, l'ordre est inversé.

Preuve : prouvons la chose pour $x \geq 1$ dans un premier temps. Pour étudier les positions relatives de $y = x^2$ et de $y = x$, on va

évaluer la différence $x^2 - x$.

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

Graphiquement, cela donne :



Or, si $x \geq 1$ alors $x - 1 \geq 0$ et $x \geq 0$

Donc $x(x - 1) \geq 0$.

Donc $x^2 - x \geq 0$ ce qui signifie que $y = x^2$ est **au-dessus** de $y = x$.

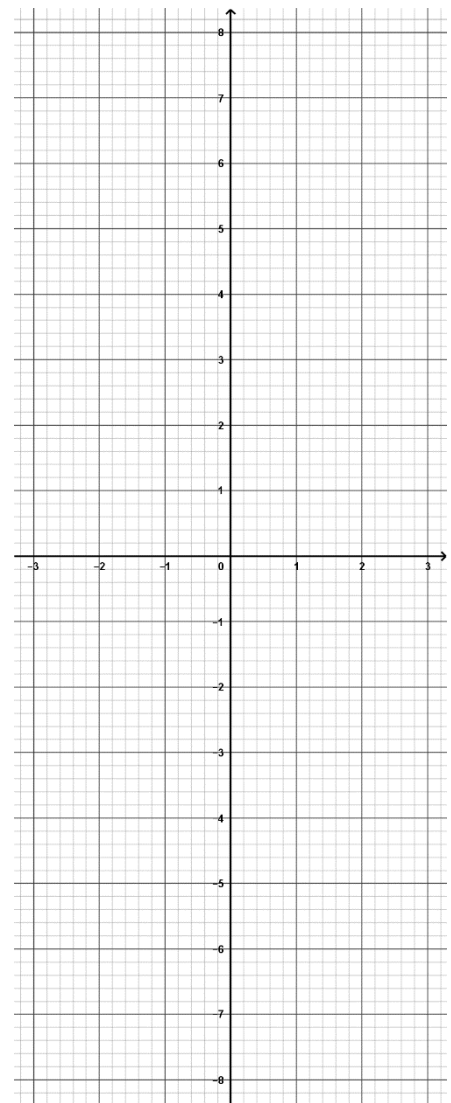
On fait de même pour les positions relatives de $y = x^3$ et de $y = x^2$:

$$x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$$

Là encore, si $x \geq 1$ alors $x - 1 \geq 0$ donc $x^2(x - 1) \geq 0$ car $x^2 \geq 0$.

Donc $x^3 - x^2 \geq 0$ ce qui signifie que $y = x^3$ est **au-dessus** de $y = x^2$.

Et lorsque $x \leq 1$, on a $x - 1 \leq 0$ ce qui inverse bien toutes les inégalités.



II Fonction inverse

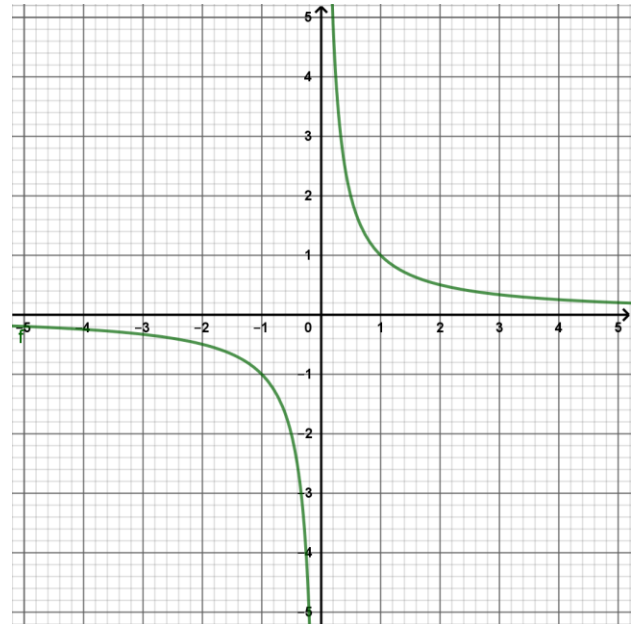
La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

par $f(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ la fonction inverse n'est donc pas définie en 0.

Traçons sa représentation graphique :

-5	-2	-1	-0,5	-0,2	0	0,2
-0,2	-0,5	-1	-2	-5	ERR	5
0,5	1	2	5			
2	1	0,5	0,2			

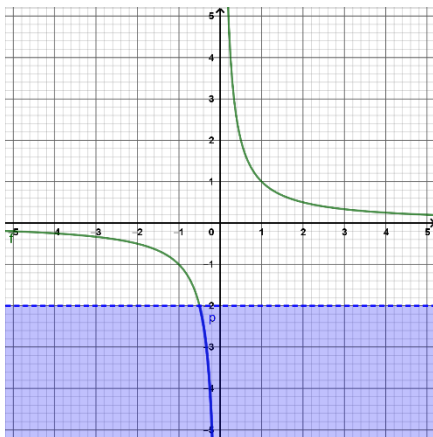


Remarques : 1. La courbe représentative de la fonction inverse est appelée « hyperbole ».

2. Quel que soit le repère choisi, elle est symétrique par rapport à l'origine.

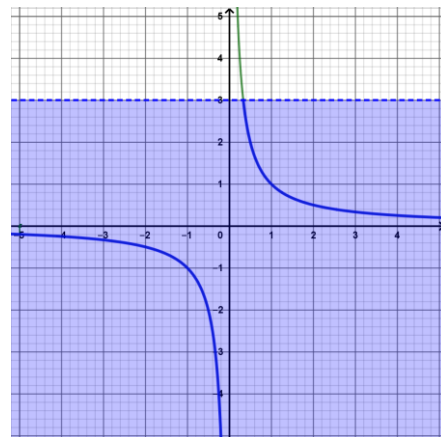
Ex 1 : Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} \leq -2$

On obtient $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right[$



Ex 2 : Résoudre graphiquement $\frac{1}{x} < 3$

On obtient $x \in]-\infty; 0[\cup]0; \frac{1}{3}[$



III Fonction racine carrée

La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

$\Rightarrow$ la fonction racine carrée n'est donc pas définie pour des valeurs négatives.

Traçons sa représentation graphique :

x	0	0,25	1	4	9	16	25
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	2	3	4	5

