

POURCENTAGES & ÉVOLUTIONS

I Notions fondamentales

1° Calculer une proportion

Définition : On appelle proportion le quotient $p = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}}$

Une proportion peut être transformée en pourcentage en la multipliant par 100.



Toujours se demander quelle est la population totale, celle qui fait référence.

Ex : Dans un lycée de 1 000 élèves on dénombre 550 filles, parmi lesquelles 165 sont externes.

La proportion de filles parmi les élèves est $p = \frac{550}{1\,000} = 0,55$

⇒ Les filles représentent donc $0,55 \times 100 = 55\%$ des élèves du lycée.

La proportion d'externes parmi les filles est $p = \frac{165}{550} = 0,3$

⇒ Les externes représentent donc $0,3 \times 100 = 30\%$ des externes.

La proportion de filles externes parmi les élèves est $p = \frac{165}{1\,000} = 0,165$

⇒ Les filles externes représentent donc $0,165 \times 100 = 16,5\%$ des élèves du lycée.

2° Calculer un effectif

On cherche en général à calculer un effectif à partir d'un pourcentage.

Et pour calculer un pourcentage « de » quelque chose, il suffit de faire une multiplication.

Ex : Dans un lycée de 900 élèves, on sait que 38% des élèves sont en seconde.

$$\frac{38}{100} \times 900 = 342$$

Il y a donc 342 élèves en seconde dans ce lycée.

(la question aurait été identique si on nous avait dit que la proportion d'élèves de seconde était 0,38)

3° Cas des proportions échelonnées

Prenons un exemple : en France, les femmes représentent 51,5% de la population. Et 28% des femmes françaises ont moins de 25 ans. Quelle proportion de la population française les femmes de moins de 25 ans représentent-elles ?

Les femmes de moins de 25 ans représentent 28% des 51,5% de femmes.

$$\frac{28}{100} \times \frac{51,5}{100} = 0,1442 = 14,42\%$$

Les femmes de moins de 25 ans représentent 14,42% de la population.

Propriété : soient A, B et C trois ensembles tels que $A \subset B \subset C$.
Notons p_1 la proportion de A dans B et p_2 la proportion de B dans C.

La proportion de A dans C est alors $p = p_1 \times p_2$.

Ex : 35% des élèves d'un lycée sont en seconde, et 58% des secondes sont des filles. Quel pourcentage des élèves du lycée les filles de seconde représentent-elles ?

$$35\% \times 58\% = 0,35 \times 0,58 = 0,203$$

Les filles de seconde représentent 20,3% des élèves du lycée

II Evolutions

1° Coefficients multiplicateurs

Propriété : Pour augmenter une quantité de $t\%$, on la multiplie par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$

Pour diminuer une quantité de $t\%$, on la multiplie par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$

On dit que $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ et $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ sont les coefficients multiplicateurs.

Preuve : Notons Q la quantité qui va évoluer.

Si elle augmente de $t\%$, cela fait donc une augmentation quantitative de $Q \times \frac{t}{100}$

Au final, cela fait donc $Q + Q \times \frac{t}{100} = Q \left(1 + \frac{t}{100}\right)$

Ex : Une augmentation de 15% correspond à une multiplication par 1,15

Une baisse de 15% correspond à une multiplication par 0,85

Une multiplication par 1,23 correspond à une augmentation de 23%

Une multiplication par 0,75 correspond à une baisse de 25%

Ex : Pendant les soldes, le prix de la PS5 va baisser de 15%. Sachant qu'elle coûte actuellement 499 €, quel sera son prix durant les soldes ?

$$499 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 499 \times 0,85 = 424,15$$

Pendant les soldes, la PS5 coûtera 424,15 €.

Ex : Début 2018, un paquet de cigarettes coûtait 7 €. Durant cette année, son prix a augmenté de 13% selon l'INSEE. Quel était alors le tarif du paquet de cigarettes au début de l'année 2019 ?

$$7 \times \left(1 + \frac{13}{100}\right) = 7 \times 1,13 = 7,91$$

Au début de l'année 2019, le paquet de cigarettes coûtait 7,91 €.

Ex : Une publicité annonce qu'un téléviseur coûte 799 € HT. Combien coûte-t-il TTC ?



Le taux normal de TVA est de 20%. Le prix TTC correspond donc à une augmentation de 20% du prix HT. Autrement dit, $TTC = \text{coefficient} \times HT$ (ou $TTC = HT + TVA$)

$$799 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 7 \times 1,20 = 958,80$$

Ce téléviseur coûte 958,80 € TTC.

⇒ Il existe deux taux réduits de TVA, l'un à 10% (musées, fêtes foraines, travaux d'amélioration du logement, transports de voyageurs...) et 5,5% (produits alimentaires, équipements pour handicapés, livres, cantines scolaires, cinéma, travaux d'amélioration énergétique des logements...) et un taux de 2,1% (médicaments remboursés, redevance TV...)

Ex : De 2019 à 2020, la population de Paris intra muros a baissé de 1,9% pour atteindre 2,148 millions d'habitants. Quelle était donc la population de Paris intra muros début 2019 ?

Notons x la population de Paris en 2019.

$$x \times \left(1 - \frac{1,9}{100}\right) = 2,148$$

$$x \times 0,981 = 2,148$$

$$x = \frac{2,148}{0,981} \approx 2,190$$

Début 2019, la population parisienne était d'environ 2,190 millions d'habitants.

2° Taux d'évolution

Le taux d'évolution d'une quantité est égal au quotient $\frac{\text{Valeur d'arrivée} - \text{Valeur de départ}}{\text{Valeur de départ}}$

Et il suffit de le multiplier par 100 pour obtenir un pourcentage.

Remarque : si le taux d'évolution est positif, il s'agit d'une augmentation. Et sinon, l'évolution est une baisse.

Ex : Le SMIC mensuel net est passé de 1 204 € en 2019 à 1 219 € en 2020. Quel pourcentage d'augmentation cela représente-t-il en pourcentage au centième près ?

$$\frac{1\,219 - 1\,204}{1\,204} \approx 0,0125 \quad \text{et} \quad 0,0125 \times 100 = 1,25\%$$

On a donc une augmentation d'environ 1,25 %.

Ex : Durant les soldes, un pull en cachemire passe de 149 € à 89 € : quel pourcentage de baisse cela représente-t-il à 0,01% près ?

$$\frac{89 - 149}{149} \approx -0,4027 \quad \text{et} \quad 0,4027 \times 100 = 40,27$$

On a donc une baisse d'environ 40,27 %.

3° Evolutions successives

Commençons par tordre le cou à deux idées fausses pourtant répandues :

« Un prix augmente de 20% puis baisse de 20% » : non, il n'est pas revenu à sa valeur initiale !

Ex : Un vélo coûte 200 €.

Si son prix augmente de 20%, le vélo coûte alors $200 \times 1,2 = 240$ €

Et si le prix baisse ensuite de 20%, le vélo coûtera $240 \times 0,8 = 192$ €

Le prix n'est donc pas revenu à sa valeur initiale.

« Un prix augmente de 20% puis encore de 10% » : non, cela ne fait pas une hausse globale de 30% !

Ex : Un vélo coûte 200 €.

Si son prix augmente de 20%, le vélo coûte alors $200 \times 1,2 = 240$ €

Et si le prix augmente à nouveau de 10%, le vélo coûtera $240 \times 1,1 = 264$ €

Or, si le prix avait augmenté de 30%, le vélo aurait coûté $240 \times 1,3 = 312$ €



Morale de l'histoire : les choses ne se passent pas « naturellement » avec les augmentations / réductions successives, en termes de pourcentages ! Il faut être prudent...

L'erreur vient du fait qu'on associe une augmentation de 20% à « +20% » c'est-à-dire à une addition, alors qu'il s'agit d'une multiplication.

⇒ Pour déterminer l'évolution globale lors d'évolutions successives, il faut revenir aux coefficients multiplicateurs et les multiplier entre eux.

Revenons à nos exemples préliminaires :

Ex : Un prix augmente de 20% puis baisse de 20%. Quelle évolution globale cela représente-t-il ?

$$1,20 \times 0,80 = 0,96$$

Cela fait donc une baisse globale de 4%.

Ex : Un prix augmente de 20% puis encore de 10%. Quelle évolution globale cela représente-t-il ?

$$1,20 \times 1,10 = 1,32$$

Cela fait donc une hausse globale de 32%.

Ex : Le gouvernement souhaite augmenter le prix du tabac de 20% en 3 ans. Il augmente tout d'abord les prix de 6%, puis de 7% l'année suivante : que doit-il faire la troisième année ?

Notons x le coefficient correspondant à l'évolution :

$$1,06 \times 1,07 \times x = 1,20$$

$$x = \frac{1,20}{1,06 \times 1,07} \approx 1,0580$$

Il faut donc faire une augmentation de 5,80%.

Ex : Je place 1 500 € à 3% : quelle somme aurai-je dans 20 ans ?

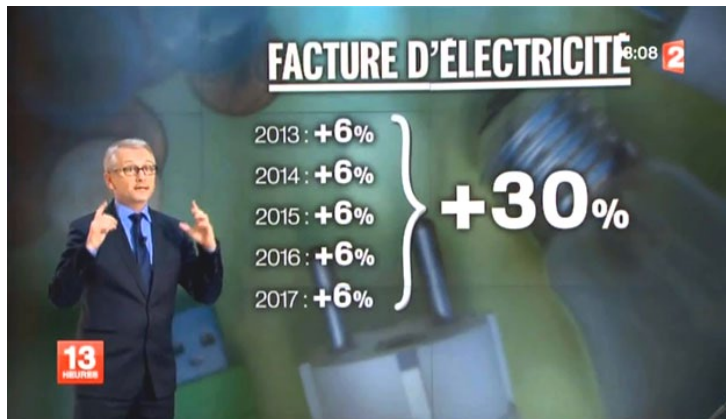
Chaque année, l'argent dont je dispose est augmenté de 3% donc multiplié par 1,03.

$$1\,500 \times 1,03^{20} \approx 2\,709,17$$

Dans 20 ans, je disposerai donc de 2 709,17 €

Remarque : cela correspond à une hausse globale de 80,61 % car $1,03^{20} \approx 1,8061$

Et pour l'anecdote, voilà ce qu'on a pu voir il y a quelques années dans un journal télévisé :



Et le journaliste commente : « C'est du jamais vu : +6% par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30%. ».

Mais un élève de 2nde pourrait rectifier cette erreur grossière : $1,06^5 \approx 1,3382$

« L'arnaque » est grossière : on annonce aux français 5 hausses de 6%, soit une hausse de 30%, alors que cela représente en réalité une hausse de 33,82% !

La véritable question est : pour obtenir une hausse de 30% en 5 ans, quelle hausse faut-il pratiquer chaque année ?

Il faudrait résoudre $x^5 = 1,30$ et cela donnerait $x \approx 5,39\%$

4° Evolutions réciproques

Définition : Une quantité subit une évolution (augmentation ou baisse).

On appelle évolution réciproque l'évolution qui permet à cette quantité de revenir à sa valeur initiale.

Ex : Pour compenser une augmentation de 25%, quelle baisse faut-il appliquer ?

Notons x le coefficient correspondant à l'évolution :

$$1,25 \times x = 1$$

$$x = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Il faut donc appliquer une baisse de 20%.

Autrement dit, l'évolution réciproque d'une augmentation de 25% est une baisse de 20%.

COMPLÉMENT : PRODUITS EN CROIX

Les produits en croix traduisent des situations de proportionnalité et se prêtent donc plutôt bien aux calculs impliquant des pourcentages.

Ex : Pendant les soldes, le prix de la PS5 va baisser de 15%. Sachant qu'elle coûte actuellement 499 €, quel sera son prix durant les soldes ?

	Actuel	Soldé
%	100	85
€	499	

$$\frac{85 \times 499}{100} = 424,15$$

Pendant les soldes, la PS5 coûtera **424,15 €**.

Ex : Début 2018, un paquet de cigarettes coûtait 7 €. Durant cette année, son prix a augmenté de 13% selon l'INSEE. Quel était alors le tarif du paquet de cigarettes au début de l'année 2019 ?

	2018	2019
%	100	113
€	7	

$$\frac{113 \times 7}{100} = 7,91$$

Début 2019, le paquet de cigarettes coûtait **7,91 €**.

Ex : De 2019 à 2020, la population de Paris intra muros a baissé de 1,9% pour atteindre 2,148 millions d'habitants. Quelle était donc la population de Paris intra muros début 2019 ?

	2019	2020
%	100	98,1
Hab.		2,148

$$\frac{100 \times 2,148}{98,1} \approx 2,190$$

Début 2019, la population parisienne était d'environ **2,190 millions d'habitants**

Ex : Le SMIC mensuel net est passé de 1 204 € en 2019 à 1 219 € en 2020. Quel pourcentage d'augmentation cela représente-t-il en pourcentage au centième près ?

	2019	2020
%	100	
€	1 204	1 219

$$\frac{100 \times 1\,219}{1\,204} \approx 101,25$$

On a donc une augmentation d'environ **1,25 %**.

Ex : Durant les soldes, un pull en cachemire passe de 149 € à 89 € : quel pourcentage de baisse cela représente-t-il à 0,01% près ?

	Normal	Soldé
%	100	
€	149	89

$$\frac{100 \times 89}{149} \approx 59,73$$

$$100 - 59,73 = 40,27$$

On a donc une baisse d'environ **40,27 %**