

FONCTIONS NUMÉRIQUES

I Vocabulaire

1° Notion de fonction numérique

Une fonction numérique est un procédé mathématique qui, à un nombre donné, associe un autre nombre.

La plupart du temps, une fonction est notée à l'aide d'une lettre qui sera le nom de cette fonction.

Par abus de langage, nous parlerons simplement de « fonctions » pour parler de « fonctions numériques » : ce sont en effet les seules fonctions que nous étudierons cette année. On pourrait toutefois imaginer une fonction qui transforme un vecteur en nombre (sa norme), une fonction qui associe sa couleur à un feutre, etc.

Prenons l'exemple d'un troupeau de chameaux : combien compte-t-il de bosses ?

Il est évident que le nombre de bosses dépend du nombre de chameaux : c'est une fonction du nombre de chameaux.

⇒ Si ce troupeau est composé de 5 chameaux $\mapsto$ 10 bosses

⇒ Si ce troupeau est composé de 12 chameaux $\mapsto$ 24 bosses

⇒ Et si ce troupeau est composé de x chameaux $\mapsto$ $2x$ bosses

Autrement dit, si l'on note b le nombre de bosses du troupeau et x le nombre de chameaux, b est (une) fonction de x . Et puisqu'on vient de voir que b vaut $2x$, on peut donc noter $b(x) = 2x$.

Cela se lit « b de x égale $2x$ ».

Définition : Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ associe à chaque nombre réel $x \in \mathcal{D}$ un unique nombre réel noté $f(x)$.

On dit que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f .

On note : $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Cela se lit : « La fonction f , définie sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x)$. ».

On dit que la lettre x est la variable de la fonction f .

Remarques : 1. On notera parfois $\mathcal{D}_f$ pour l'ensemble de définition « de la fonction f ».

2. La variable d'une fonction est « muette » : on pourrait prendre t au lieu de x , cela ne changerait rien (c'est souvent le cas en physique, pour représenter le temps)

2° Image et antécédent

Dans le cas de notre troupeau de chameau, on a vu que le nombre de bosses d'un troupeau de 12 chameaux est 24. Cela se notait $b(12) = 24$.

On dit que 24 est l'**image** de 12 par (la fonction) b , ou que 12 est l'**antécédent** de 24 par b .

Autrement dit, l'**antécédent** est le nombre de départ, et l'**image** est le nombre d'arrivée.

Remarque : si je dis que « 5 a pour image 3 par f », cela revient à dire que « 3 est l'**image** de 5 par f ».

Autrement dit, 5 est l'**antécédent** de 3 par f .

Important : 1. Un nombre possède **une unique image**

2. Un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**.

Considérons par exemple la fonction $f(x) = x^2$.

On a $f(5) = 5^2 = 25$ et $f(-5) = (-5)^2 = 25$

Le nombre 25 a donc deux antécédents qui sont 5 et -5 .

- Calculer l'image d'un nombre : il suffit de remplacer la variable de la fonction par ce nombre puis d'effectuer le calcul.

Ex : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - 5x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'image de 3 par f .

$$\begin{aligned}f(3) &= 2 - 5 \times 3 \\&= 2 - 15 \\&= -13\end{aligned}$$

L'image de 3 par f est **-13**

- Calculer le – ou les – antécédent(s) d'un nombre : on est ramenés à résoudre une équation. On cherche en effet la valeur de la variable, qui devient donc une inconnue.

Ex : Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - 5x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'antécédent de 3 par f .

Notons x l'antécédent de 3 par f . On a alors :

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 \\2 - 5x &= 3 \\2 - 3 &= 5x \\x &= \frac{-1}{5}\end{aligned}$$

L'antécédent de 3 par f est **$\frac{-1}{5}$**

II Représentation graphique d'une fonction

1° Effectuer une représentation graphique

Dans un repère du plan, on appelle représentation graphique de la fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où $x \in \mathcal{D}_f$.

Pour effectuer la représentation graphique / tracer la courbe représentative d'une fonction f :

1. Choisir un nombre $x \in \mathcal{D}_f$
2. Calculer son image $y = f(x)$ (on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe)
3. Placer le point de coordonnées $(x ; y)$
4. Recommencer toutes les étapes précédentes

Ex : Effectuer la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{4x - 4}{1 + x^2}$ pour tout $x \in [-3 ; 3]$.

Prenons $x = 0$ par exemple :

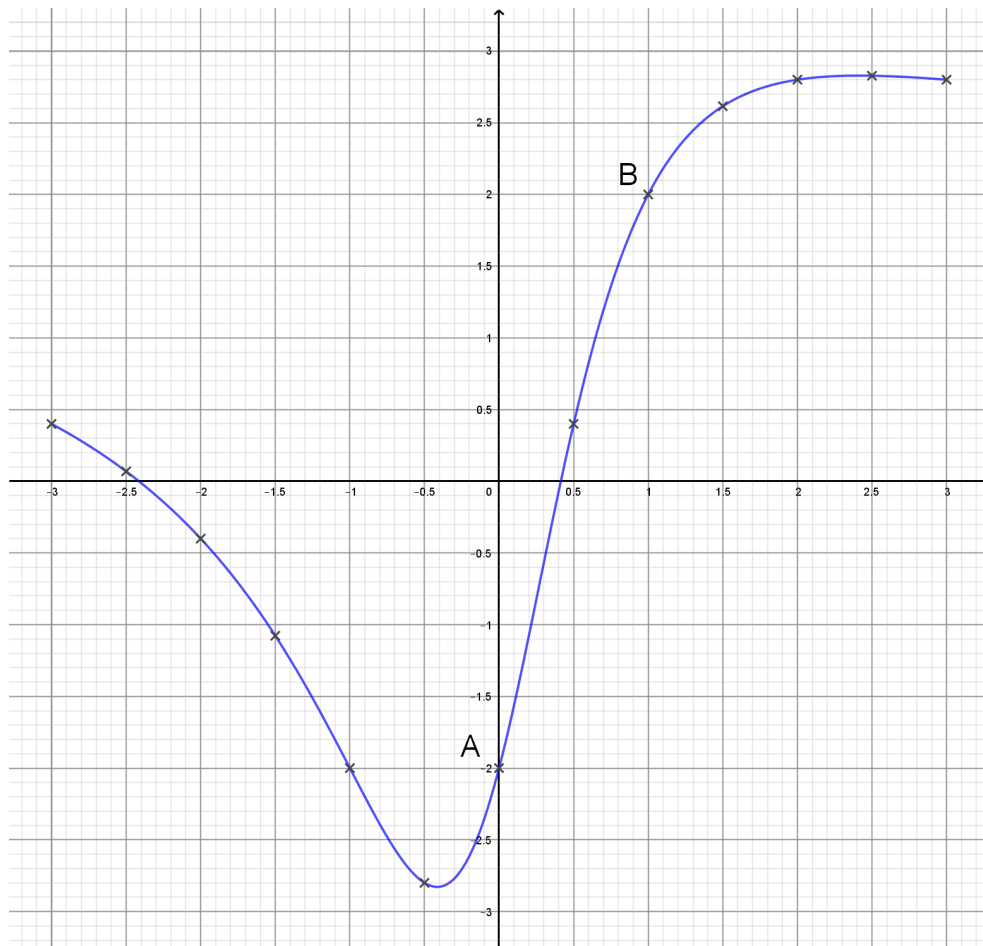
$$\begin{aligned} f(0) &= 2 + \frac{4 \times 0 - 4}{1 + 0^2} \\ &= 2 + \frac{-4}{1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(0 ; -2)$.

Prenons $x = 1$ par exemple :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + \frac{4 \times 1 - 4}{1 + 1^2} \\ &= 2 + \frac{4 - 4}{1 + 1} \\ &= 2 + \frac{0}{2} = 2 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f$ passe par le point $B(1 ; 2)$.



On a toutefois besoin de plus de points : la calculatrice va nous faciliter le travail...

Pour obtenir la représentation graphique d'une fonction :



- Appuyer sur la touche « $f(x)$ »
- Entrer l'expression de $f(x)$ en utilisant la touche « X, T, θ, n » pour faire la lettre x
- Appuyer sur la touche « graphe »

Il est possible de choisir la zone à afficher :

- Appuyer sur la touche « fenêtre »
- Choisir les valeurs minimales et maximales souhaitées en abscisse ($X_{\min}$ et $X_{\max}$) (et cela suffit)
- Appuyer sur la touche « zoom » et sélectionner le zoom automatique en appuyant sur « 0 » (cette opération va optimiser les valeurs à afficher sur l'axe des ordonnées)

Remarque : il est possible de modifier manuellement les valeurs de la « fenêtre », notamment $Y_{\min}$ et $Y_{\max}$, en fonction du résultat souhaité...

La calculatrice permet également de calculer automatiquement les valeurs des images $f(x)$:



- Appuyer sur la touche « $f(x)$ » et entrer l'expression de $f(x)$
- Aller dans « déf table » en appuyant sur « 2nde » puis sur « fenêtre »
 - ↪ DébutTbl : valeur de la première valeur de x dont on souhaite calculer l'image
 - ↪ Δ Tbl : écart que l'on souhaite entre deux valeurs de x (c'est le « pas » de la table)
 - ↪ Indpnt : sélectionner « Auto » pour que la calculatrice choisisse automatiquement les valeurs de x en fonction des réglages précédents, et sélectionner « Demande » pour choisir manuellement une par une les valeurs de x dont on souhaite les images
- Aller dans « table » en appuyant sur « 2nde » puis sur « graphe » pour voir les valeurs

Compléter le tableau ci-dessous pour la fonction que l'on souhaite tracer (arrondies à 10^{-2} près) :

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	0,4	0,07	-0,4	-1,08	-2	-2,8	-2	0,4	2	2,62	2,8	2,83	2,8

Remarque : une représentation graphique est toujours « approximative » : rien n'indique en effet que la courbe soit réellement telle quelle puisqu'on extrapole ce qui se passe entre les points placés...

Réciproquement, le point de coordonnées $(x ; y)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f si et seulement si $x \in \mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe-t-elle par le point A de coordonnées $(-1 ; 10)$ et par le point B de coordonnées $(3 ; 7)$?

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= 2 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 3 \\
 &= 2 \times 1 + 5 + 3 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f$ passe donc par A.

$$\begin{aligned}
 f(3) &= 2 \times 3^2 - 5 \times 3 + 3 \\
 &= 2 \times 9 - 15 + 3 \\
 &= 6 \neq 7
 \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_f$ ne passe donc pas par B.

2° Exploiter une représentation graphique

Attention : toute valeur obtenue par lecture graphique est nécessairement **approximative**.
Par abus de langage, on ne le précisera pas toujours.

Dans un graphique, l'axe des **abscisses** permet de lire les **antécédents** et l'axe des **ordonnées** permet de lire les **images**.

- Lecture d'image et d'antécédent

Ex : On considère la fonction g dont la représentation graphique est ci-contre :

Image de -1 par g : **1**

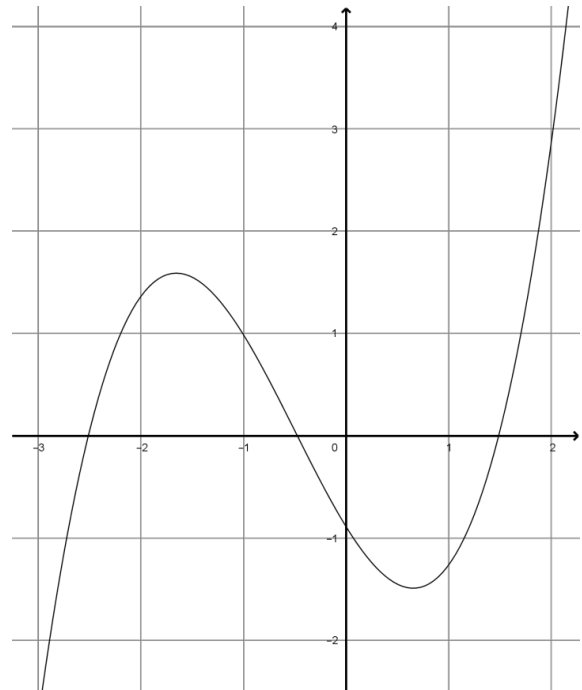
Antécédent(s) de -1 par g : **$-2,7$ / $0,1$ / $1,2$**

Image de 0 par g : **$-0,9$**

Antécédent(s) de 0 par g : **$-2,5$ / $-0,5$ / $1,4$**

Image de 2 par g : **$2,9$**

Antécédent(s) de 2 par g : **$1,8$**



- Résolution d'équations et d'inéquations

Ex : On considère les fonctions f et g définies sur $[-1 ; 4]$ et dont les représentations graphiques sont ci-contre :

Résoudre $g(x) > 3$:

On se place à 3 sur l'axe des ordonnées, et on trace mentalement une droite horizontale. On prend alors en compte la zone pour laquelle $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de cette droite.

On obtient **$x \in]0 ; 2[$** .

Résoudre $f(x) \leq 0$:

Cela revient à chercher quand est-ce que $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses.

On obtient **$x \in [1 ; 3]$** .

Résoudre $g(x) > f(x)$:

Cela revient à chercher les valeurs de x pour

lesquelles **$\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$** .

On obtient **$x \in]0 ; 3[$** .

