

INTERVALLES

I Intervalles de $\mathbb{R}$

1° Définitions

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

L'intervalle noté $[a ; b]$ est l'ensemble des nombres réels compris entre a et b .

Autrement dit, $x \in [a ; b]$ signifie que $a \leq x \leq b$.

On dit que a et b sont les bornes de cet intervalle.

Les crochets de cet intervalle sont tournés vers l'intérieur de l'intervalle : cela indique que les bornes a et b sont comprises dans l'intervalle $[a ; b]$.

Autrement dit, $a \in [a ; b]$ et $b \in [a ; b]$.

On dit alors que l'intervalle est fermé en a (ou « fermé à gauche ») et fermé en b (ou « fermé à droite »).

L'intervalle $[a ; b[$ est le même que $[a ; b]$ sauf que son crochet droit est tourné vers l'extérieur de l'intervalle. Cela indique que la borne b est exclue de $[a ; b[$.

Autrement dit, $b \notin [a ; b[$.

On dit que cet intervalle est ouvert en b (ou ouvert à droite).

Ainsi, $x \in [a ; b[$ signifie que $a \leq x < b$.

On définit de même les intervalles $]a ; b]$ et $]a ; b[$.

Remarque : un intervalle est dit « fermé » s'il est fermé en ses deux bornes, et ouvert s'il est ouvert en ses deux bornes.

L'intervalle $[a ; +\infty[$ est l'ensemble des nombres plus grands que a .

Autrement dit, $x \in [a ; +\infty[$ signifie que $x \geq a$.

De même, l'ensemble des nombres plus petits que b est l'intervalle $] - \infty ; b]$.

Autrement dit, $x \in] - \infty ; b]$ signifie que $x \leq b$.

Et on définit de même les intervalles ouverts $]a ; +\infty[$ et $] - \infty ; b[$ dont les bornes sont exclues.

Remarques : 1. Un intervalle ayant pour borne $\pm\infty$ sera toujours ouvert au niveau de ∞ .

2. L'intervalle $] - \infty ; +\infty[$ est l'ensemble $\mathbb{R}$.

2° Représentation graphique

Sur une droite graduée, les intervalles peuvent être représentés par des segments ou des demi-droites (voire la droite entière), dont les extrémités sont – ou ne sont pas – incluses.

Par exemple, l'intervalle $]2 ; 9]$ est l'ensemble des nombres x tels que $2 < x \leq 9$.

Graphiquement, cela donne :



De même, l'intervalle $] -\infty ; 9[$ est l'ensemble des nombres x tels que $x < 9$.

Graphiquement, cela donne :



Ex : compléter le tableau suivant :

Intervalle	Nombres réels x	Représentation graphique
$]4 ; +\infty[$	$x > 4$	
$[-8 ; 3]$	$-8 \leq x \leq 3$	
$] -\infty ; 2]$	$x \leq 2$	

Remarques : 1. Ecrire $4 > x$ revient à écrire $x < 4$, mais cette seconde version est plus « naturelle »

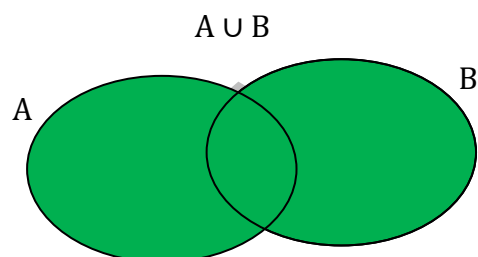
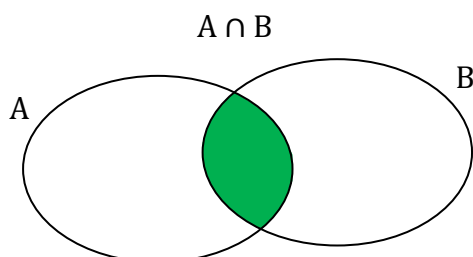
2. On n'écrit pas $x < +\infty$ ou $x > -\infty$: ce sont des évidences...

II Union et intersection

Définition : Soient A et B deux ensembles.

L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B , c'est-à-dire à A et B en même temps. On la note $A \cap B$.

L'union de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B , c'est-à-dire à A ou B et donc éventuellement à chacun d'eux. On la note $A \cup B$.



Attention : le « ou » de « $A \cup B$ » est dit « inclusif »

En français, le « ou » est souvent « exclusif » : quand on a le choix entre fromage ou dessert, c'est l'un ou l'autre, pas les deux...

Mais si $x \in A \cup B$ alors x peut appartenir à A et à B simultanément : ce n'est pas interdit !

Autrement dit, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

Ex : une urne contient des boules blanches B_1, B_2, B_3, B_4 et des boules noires N_1, N_2, N_3, N_4 . On note B l'ensemble des boules blanches, N l'ensemble des boules noires et P l'ensemble des boules paires.

$$B \cap P = \{B_2, B_4\}$$

$$B \cup P = \{B_1, B_2, B_3, B_4, N_2, N_4\}$$

Ex : Déterminer les intersections et les unions suivantes :

1. $] -\infty ; 3] \cap] -8 ; 12[=] -8 ; 3]$

$] -\infty ; 3] \cup] -8 ; 12[=] -\infty ; 12[$



2. $] -5 ; 3] \cap]4 ; +\infty[= \emptyset$

$] -5 ; 3] \cup]4 ; +\infty[= \dots \text{« impossible »}$



Remarque : l'intersection de deux intervalles est toujours **un intervalle** (éventuellement vide), mais la réunion de deux intervalles **n'est pas nécessairement un intervalle**.

Cas « particuliers » : $[1 ; 2] \cap [2 ; 3] = \{2\}$

$[1 ; 2] \cup [2 ; 3] = [1 ; 3]$

$[1 ; 2[\cap [2 ; 3] = \emptyset$

$[1 ; 2[\cup [2 ; 3] = [1 ; 3]$

$[1 ; 2[\cap]2 ; 3] = \emptyset$

$[1 ; 2[\cup]2 ; 3] = \dots$

III Valeur absolue

1° Définition et propriétés

La valeur absolue d'un nombre est égale à **ce nombre** si celui-ci est positif, et elle est égale à **son opposé** si ce nombre est négatif. La valeur absolue d'un nombre est donc toujours **positive**.

Définition : Soit x un nombre réel quelconque.

La valeur absolue de x se note $|x|$: elle est définie par $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Ex : $|-8| = 8$ et $|8| = 8$

Propriétés : Soit x et y deux nombres réels quelconques.

1. $|x| \geq 0$

2. $|-x| = |x|$

3. Si $|x| = |y|$ alors $x = y$ ou $x = -y$

Ex : résoudre l'équation $|2x - 5| = 8$

On a deux solutions : $2x - 5 = 8$ ou $2x - 5 = -8$

$2x = 8 + 5$

$2x = -8 + 5$

$x = \frac{13}{2}$

$x = \frac{-3}{2}$

On a vu que pour tout $x \geq 0$ on a $(\sqrt{x})^2 = x$. Autrement dit, un carré élimine toujours une racine carrée.



En revanche, $\sqrt{(x^2)} \neq x$. En effet, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$. Autrement dit, une racine carrée n'élimine pas toujours un carré. Mais il est toutefois possible d'écrire que $\sqrt{(x^2)} = |x|$.

2° Distance et valeur absolue

La distance entre deux réels a et b est la distance qui sépare les points A et B d'abscisses respectives a et b sur une droite graduée.

Si $b > a$, cette distance vaut donc $b - a$ et si $a > b$, cette distance vaut alors $a - b$.

Autrement dit, la distance entre a et b vaut $|b - a|$ (ou $|a - b|$: c'est la même chose !)

Ex : la distance entre -5 et 3 vaut $|-5 - 3| = |-8| = 8$ (ou $|3 - (-5)| = |8| = 8$)

⇒ La valeur absolue d'un réel x peut être définie comme la distance entre x et 0 .

Propriété : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

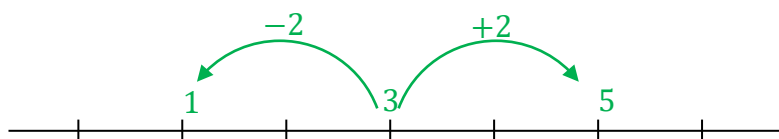
L'intervalle $[a - r ; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq r$

Preuve : $x \in [a - r ; a + r]$ équivaut à $a - r \leq x \leq a + r$

Par soustraction de a à chacun des membres, on obtient $-r \leq x - a \leq r$

Visuellement, a est le centre de l'intervalle $[a - r ; a + r]$ et on peut s'en écarter d'un côté ou de l'autre sur une distance de r .

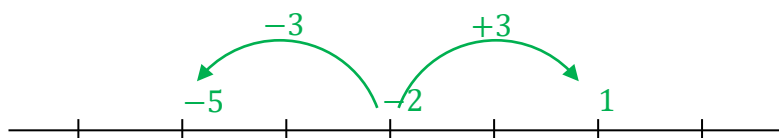
Ex : • Résoudre $|x - 3| < 2$



Cela revient à dire que $1 < x < 5$, c'est-à-dire $x \in]1 ; 5[$

• Résoudre $|x + 2| \leq 3$

$$|x - (-2)| \leq 3$$



Cela revient donc à dire que $-5 < x < 1$, c'est-à-dire $x \in [-5 ; 1]$.

• Résoudre $|3x - 1| < 4$

Cela revient à dire que $-3 < 3x < 5$

$$\frac{-3}{3} < x < \frac{5}{3}$$

$$x \in \left] -1 ; \frac{5}{3} \right[$$

