

VECTEURS

1^{ère} partie

I Définitions

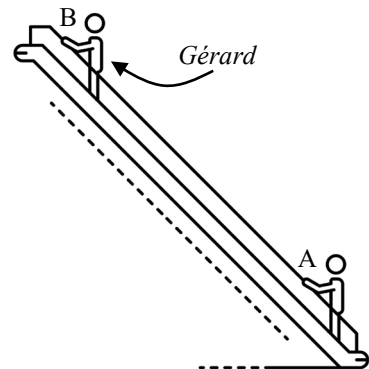
1° Translation

Une translation correspond à l'idée qu'on se fait d'un **glissement** : un objet affecté par une translation n'est donc pas déformé, ne pivote pas : il **glisse** simplement en suivant une droite.

On peut donc **superposer** la figure d'arrivée et celle de départ : ce sont exactement les mêmes !

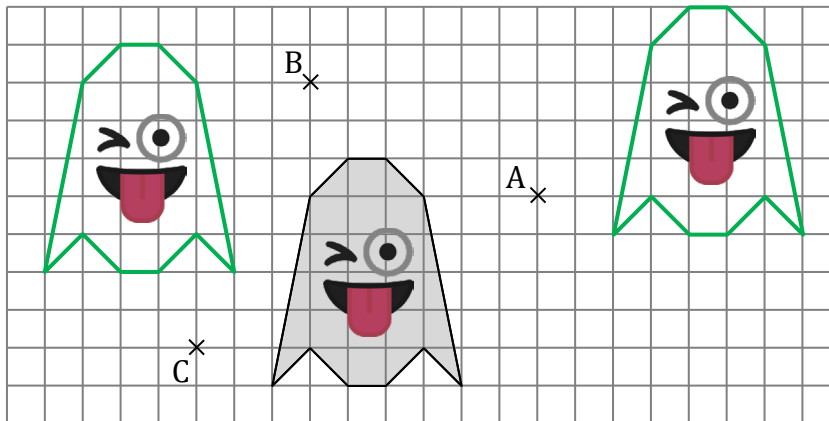
Plus précisément, une translation est donc caractérisée par trois données :

- une **direction** : la droite (AB) (la rampe de l'escalator)
- un **sens** : de A vers B par exemple (Gérard monte par exemple)
- une **longueur** : la distance AB (parcourue par Gérard)



On dit que B est l'**image** de A par cette translation.

Ex : construire l'image de Casper par la translation qui transforme A en B puis par la translation qui transforme C en A



Le plus simple est de chercher la nouvelle position de Casper en effectuant la translation d'un de ses points, puis de le dessiner en s'aidant du quadrillage (une translation ne déforme pas les objets...)

2° Vecteurs

Les trois données d'une translation peuvent se représenter par une flèche appelée vecteur.

Définition : Soient A et B deux points donnés.

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** : la droite (AB)
- son **sens** : de A vers B
- sa **longueur** : la longueur AB



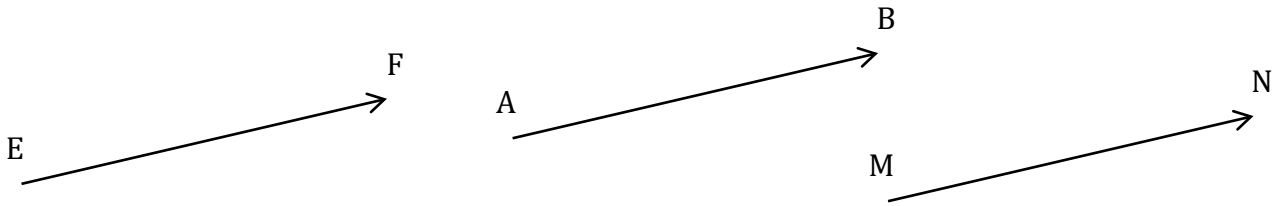
On peut désormais parler de « translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ », et on peut la noter $t_{\overrightarrow{AB}}$.

Remarque : on dit que A est l'**origine** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et que B est son **extrémité**.

Définition : deux vecteurs qui ont la même direction et la même longueur mais des sens différents sont dits opposés.

Par exemple, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : on peut noter $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Considérons la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$: elle transforme A en B, mais aussi E en F par exemple, et M en N :



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc égaux puisqu'ils caractérisent le même mouvement : ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

On peut alors noter $\vec{u}$ le vecteur de cette translation : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{MN}$ en sont des représentants.

Autrement dit, un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ est un vecteur égal à $\vec{u}$.

On a donc $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$



Un vecteur n'a pas d'emplacement physique : il indique simplement un glissement et il peut être représenté à divers endroits (il a plusieurs représentants)
Par conséquent, parler du « milieu d'un vecteur » par exemple ne veut rien dire !
On ne peut donc pas dire qu'un vecteur est « un segment avec un sens » car un segment a une position physique sur le papier, là où un vecteur est « virtuel ».

On parle des rats, vecteurs de la peste, au sens où ils véhiculent cette maladie (on retrouve la notion de mouvement). On dit que la presse est un vecteur de l'information, qu'internet est un vecteur de communication...

Définition : la longueur d'un vecteur est appelée norme et notée $\|\quad\|$. Ainsi, $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

⇒ Cette notation est utile pour parler de la longueur du vecteur $\vec{u}$ que l'on note donc $\|\vec{u}\|$.

Remarque : si A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc nul : on le note $\vec{0}$.

Ce vecteur n'a ni direction, ni sens ; et sa longueur est 0.

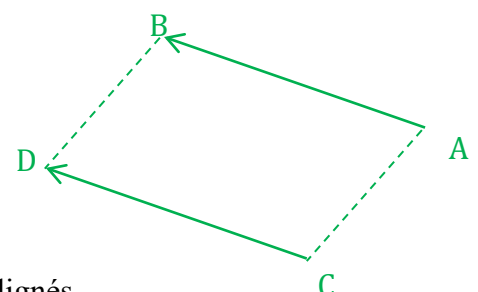


$\vec{0} \neq 0$. Le lien entre les deux est que $\|\vec{0}\| = 0$

II Application à la géométrie

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$



Remarque : ce parallélogramme peut être aplati si les points sont alignés

L'ordre des lettres est important : ne pas hésiter à faire une figure !



$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{BS} \Leftrightarrow \text{OKSB est un parallélogramme}$

$\text{NXIG est un parallélogramme} \Leftrightarrow \overrightarrow{NX} = \overrightarrow{GI} \text{ ou } \overrightarrow{XI} = \overrightarrow{NG}$

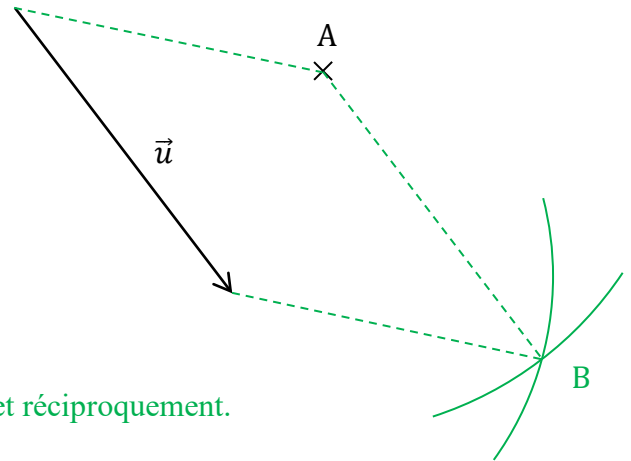
Application : construire l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{u}$

Notons B l'image de A.

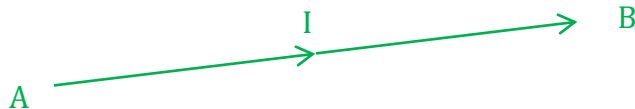
On a alors $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

Cela forme donc un parallélogramme,

on va positionner B de façon à en obtenir un.



Cas particulier : si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors I est le milieu de [AB] et réciproquement.

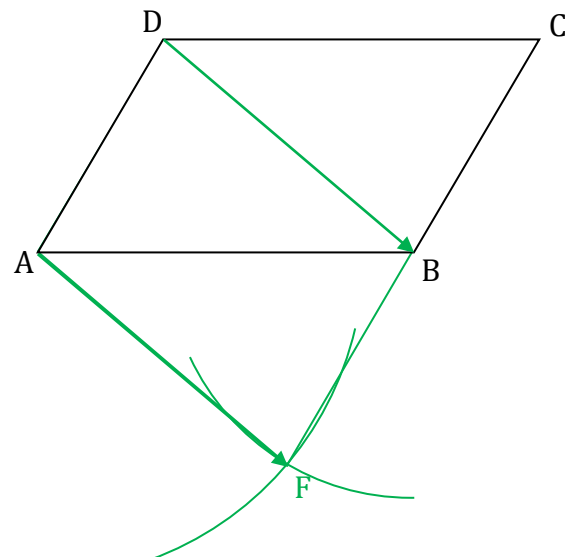


Ex : soient ABCD et AFBD deux parallélogrammes.
Montrer que B est le milieu de [CF].

ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

AFBD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$ donc B est le milieu de [CF].



III Somme de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et soit A un point.

Notons B l'image de A par la translation $t_{\vec{u}}$, puis notons C l'image de B par la translation $t_{\vec{v}}$.

Appliquer successivement la translation $t_{\vec{u}}$ puis la translation $t_{\vec{v}}$ revient à appliquer une translation qui transforme A en C.

Définition : Le vecteur $\vec{w}$ de la translation obtenue en appliquant successivement la translation $t_{\vec{u}}$ puis la translation $t_{\vec{v}}$ est appelé **vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** . On le note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

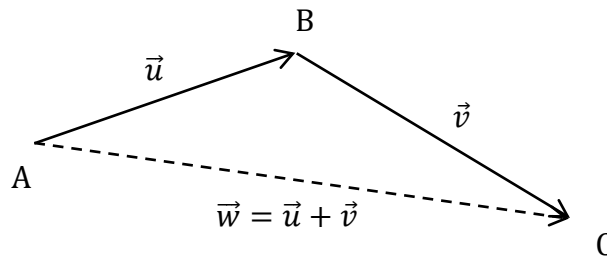
Concrètement, il existe deux façons d'additionner des vecteurs :

❶ La relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

En effet, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur de la translation qui transforme A en B et $\overrightarrow{BC}$ celui de la translation transformant B en C. Et si on applique successivement ces deux translations, A est transformé en C.

Autrement dit, additionner deux vecteurs « **qui se suivent** » est simple : le vecteur somme relie l'origine du 1^{er} et l'extrémité du 2nd !



Ex : Simplifier les écritures :

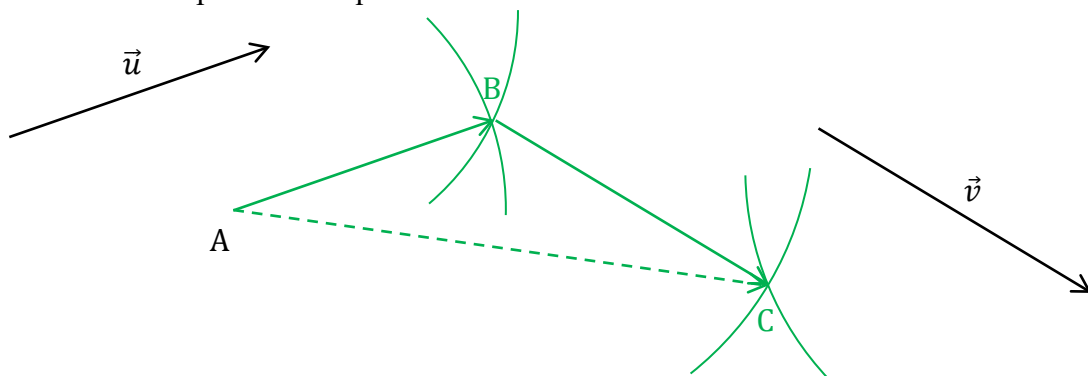
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \overrightarrow{BK}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} - \overrightarrow{RT} &= \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TR} \\ &= \overrightarrow{SR}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LM} \\ &= \overrightarrow{JM}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} + \overrightarrow{LM} - \overrightarrow{LK} &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{KL} \\ &= \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM} \\ &= \overrightarrow{JM}\end{aligned}$$

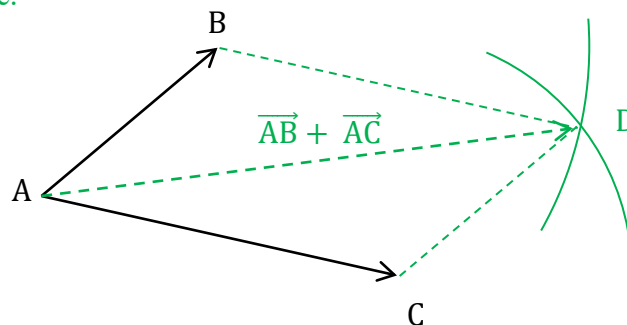
Application : Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$



② La règle du parallélogramme

Quels que soient les points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le point du plan tel que

ABDC est un parallélogramme.



En effet, ABDC est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Ainsi, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ via Chasles.

IV Vecteurs colinéaires

1° Produit d'un vecteur par un réel

Lorsqu'on applique deux fois de suite la translation $t_{\vec{u}}$, cela revient en fait à appliquer la translation $t_{\vec{w}}$

où $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u}$. Et on aimerait donc pouvoir écrire $\vec{w} = 2\vec{u}$

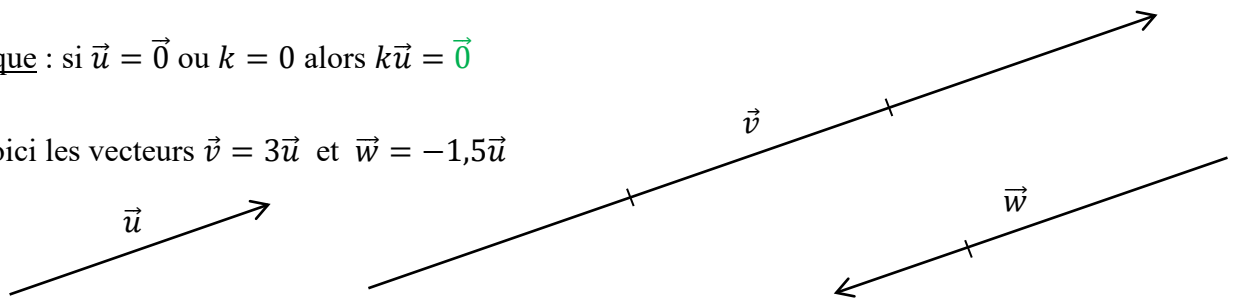
Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $k \in \mathbb{R}^*$

On appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k le vecteur noté $k\vec{u}$:

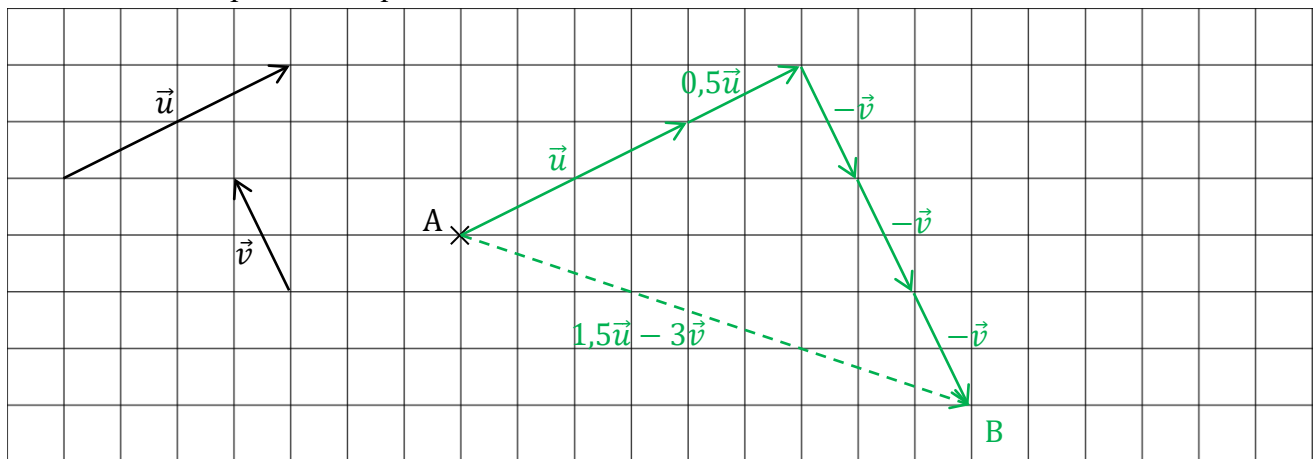
- de même direction que $\vec{u}$
- de même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et de sens contraire si $k < 0$
- de norme égale à $|k| \times \|\vec{u}\|$

Remarque : si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$

Ex : Voici les vecteurs $\vec{v} = 3\vec{u}$ et $\vec{w} = -1,5\vec{u}$



Ex : construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 1,5\vec{u} - 3\vec{v}$



2° Colinéarité

Définition : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$)

Ex : Si $\vec{u} = 3\vec{v}$ alors $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$

Si $3\vec{u} - 7\vec{v} = \vec{0}$ alors $3\vec{u} = 7\vec{v}$ et donc $\vec{u} = \frac{7}{3}\vec{v}$ ou $\vec{v} = \frac{3}{7}\vec{u}$

Propriété : Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$