

PUISSANCES & RACINES

I Puissances

1° Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}}$

Ex : $5^2 = 5 \times 5 = 25$

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Cas particuliers : $a^1 = a$

$1^n = 1$

$0^n = 0$



$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$ et $-3^2 = -3 \times 3 = -9$

2° Règle fondamentale

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a $a^n \times a^m = a^{n+m}$

Preuve : $a^n \times a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{m \text{ fois}} = a^{n+m}$

Ex : Ecrire sous la forme a^n :

$A = 7^3 \times 7^5$

$B = (-5)^2 \times (-5)^8$

$C = 4 \times 4^6$

$= 7^8$

$= (-5)^{10}$

$= 4^7$

3° Puissances négatives

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (et donc $a^{-1} = \frac{1}{a}$)

Preuve : Il s'agit de prolongements établis à partir de la règle fondamentale.

On devrait en effet avoir $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$$

De même, on devrait aussi avoir $a^{-n} \times a^n = a^0 = 1$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ex : $5^0 = 1$

$3^{-1} = \frac{1}{3}$

$7^{-4} = \frac{1}{7^4}$

$(-3)^0 = 1$

$(-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

$5^{-7} = \frac{1}{5^7}$

Propriété : Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $a^n \times a^m = a^{n+m}$

Ex : Ecrire sous la forme a^n :

$A = (-5)^{-9} \times (-5)^8$

$B = 7^{-6} \times 7^{-11}$

$C = 3^5 \times 3^{-5}$

$= (-5)^{-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

$= 7^{-17} = \frac{1}{7^{17}}$

$= 3^0 = 1$

4° Autres règles de calcul

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, on a $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ et $(a^n)^m = a^{n \times m}$

Preuves : pour la première formule, il s'agit d'une simplification de la fraction, selon que la puissance du numérateur soit supérieure ou inférieure à celle du dénominateur.

$$\text{Et } (a^n)^m = \underbrace{a^n \times a^n \times a^n \times \dots \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{n \times m}$$

$$\text{Ex : } A = \frac{(-3)^{12}}{(-3)^7}$$

$$= (-3)^5$$

$$B = \frac{5^4}{5^7}$$

$$= 5^{-3}$$

$$C = \frac{(-2)^{-7}}{(-2)^4}$$

$$= (-2)^{-11}$$

$$D = \frac{7^6}{7^{-3}}$$

$$= 7^{6-(-3)} = 7^9$$

$$E = (2^{-3})^5$$

$$= 2^{-15}$$

$$F = (5^{-4})^{-9}$$

$$= 5^{36}$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ (et $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ si $b \neq 0$)

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } a^n \times b^n &= \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} \times \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{n \text{ fois}} \\ &= \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times \dots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = (a \times b)^n \end{aligned}$$

$$\text{Ex : } A = (-5)^8 \times 4^8$$

$$= (-20)^8 = 20^8$$

$$B = 7^{-3} \times (-4)^{-3}$$

$$= (-28)^{-3}$$

$$C = (-2)^5 \times (-6)^5$$

$$= 12^5$$

Exercice : Ecrire les expressions suivantes sous la forme a^n :

$$A = \frac{7^6 \times 7^{-10}}{2^{-4} \times 5^{-4}}$$

$$= \frac{7^{-4}}{10^{-4}}$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)^{-4}$$

$$= 0,7^{-4}$$

$$B = \frac{3^6 \times 4^6}{12^{-3}}$$

$$= \frac{12^6}{12^{-3}}$$

$$= 12^9$$

$$C = \frac{2^{-7} \times 16}{0,5^8 \times 4^8}$$

$$= \frac{2^{-7} \times 2^4}{2^8}$$

$$= \frac{2^{-3}}{2^8}$$

$$= 2^{-11}$$



Attention aux priorités dans les calculs : les puissances cachent des multiplications et sont donc prioritaires, même devant les multiplications !

$$\text{Ex : } 2 \times 7^2 = 2 \times 49 = 98 \quad \text{et} \quad (2 \times 7)^2 = 14^2 = 196$$

$$2 - 5^2 = 2 - 25 = -23 \quad \text{et} \quad (2 - 5)^2 = (-3)^2 = 9$$

5° Un cas particulier

Les puissances de 10 se calculent facilement :

$$\begin{cases} 10^n = 1000 \dots 00 \text{ (1 suivi de } n \text{ zéros)} \\ 10^{-n} = 0,00 \dots 01 \text{ (1 précédé de } n \text{ zéros)} \end{cases}$$

Ex : $10^9 = 1\,000\,000\,000$

$$10^{-6} = 0,000\,001$$

Par ailleurs, pour multiplier un nombre par 10^n , il suffit de **décaler la virgule n fois, vers la droite si n est positif et vers la gauche si n est négatif (en ajoutant des zéros si nécessaire)**

Ex : $12,34 \times 10^5 = 1\,234\,000$

$$73,8 \times 10^{-4} = 0,007\,38$$

$$82 \times 10^7 = 820\,000\,000$$

$$6 \times 10^{-5} = 0,000\,06$$

Définition : un nombre est en notation scientifique lorsqu'il est écrit sous la forme $a \times 10^n$ où a est un réel tel que $1 \leq a < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Cette notation permet de comparer facilement des quantités dans l'infiniment petit / grand.

Ex : Ecrire les nombres suivants en notation scientifique :

$$A = 0,000\,154$$

$$= 1,54 \times 10^{-4}$$

$$B = 789\,000$$

$$= 7,89 \times 10^5$$

$$C = 760 \times 10^{-27}$$

$$= 7,6 \times 10^2 \times 10^{-27}$$

$$= 7,6 \times 10^{-25}$$

$$D = \frac{3 \times 10^{61} \times 7 \times 10^{-32}}{0,06 \times 10^{-25}}$$

$$= \frac{3 \times 7}{0,06} \times \frac{10^{61} \times 10^{-32}}{10^{-25}}$$

$$= 350 \times 10^{61-32+25}$$

$$= 3,5 \times 10^2 \times 10^{54}$$

$$= 3,5 \times 10^{56}$$

II Racines carrées

1° Définition

La racine carrée d'un nombre $x \geq 0$ est le nombre **positif** dont **le carré est x** . On la note $\sqrt{x}$

On a donc : $(\sqrt{x})^2 = x$

Ex : $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2. Autrement dit, $(\sqrt{2})^2 = 2$

$\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré vaut 9. Or, $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$.

Certaines racines carrées sont à connaître :

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{100} = 10$$

2° Multiplication et division de racines

Propriété : soient a et b des nombres positifs.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Preuve : $\sqrt{a \times b}$ est le nombre dont le carré vaut $a \times b$

$$\text{Par ailleurs, } (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$$

$$\text{Donc } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Propriété : soient a et b des nombres positifs, $b \neq 0$.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Ces règles de calcul vont permettre de simplifier les écritures contenant des racines carrées.

⇒ Pour y parvenir, on va décomposer les nombres en faisant apparaître des carrés parfaits, ou bien en faisant apparaître un même facteur deux fois (c'est-à-dire ... un carré parfait !)

Ex : Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible :

$$A = \sqrt{54}$$

$$= \sqrt{6 \times 9}$$

$$= \sqrt{6} \times \sqrt{9}$$

$$= 3\sqrt{6}$$

$$B = \sqrt{44}$$

$$= \sqrt{4 \times 11}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{11}$$

$$= 2\sqrt{11}$$

$$C = \sqrt{300}$$

$$= \sqrt{3 \times 100}$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{100}$$

$$= 10\sqrt{3}$$

$$D = \sqrt{125}$$

$$= \sqrt{5 \times 25}$$

$$= \sqrt{5} \times \sqrt{25}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

$$E = \sqrt{150} \quad \text{ou}$$

$$E = \sqrt{150}$$

$$= \sqrt{25 \times 6}$$

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{15 \times 10}$$

$$= \sqrt{3 \times 5 \times 2 \times 5}$$

$$= \sqrt{5^2} \times \sqrt{6}$$

$$= 5\sqrt{6}$$

$$F = \sqrt{48} \quad \text{ou}$$

$$F = \sqrt{48}$$

$$= \sqrt{3 \times 16}$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{16}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{8 \times 6}$$

$$= \sqrt{4 \times 2 \times 2 \times 3}$$

$$= \sqrt{4} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 2 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{7} \times \sqrt{21}$$

$$= \sqrt{7 \times 21}$$

$$= \sqrt{7 \times 3 \times 7}$$

$$= \sqrt{7^2} \times \sqrt{3}$$

$$= 7\sqrt{3}$$

$$H = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{35}{5}}$$

$$= \sqrt{7}$$

$$J = \sqrt{2 \times 7^2 \times 3 \times 25 \times 2}$$

$$= 2 \times 7 \times 5\sqrt{3}$$

$$= 70\sqrt{3}$$

3° Addition et soustraction de racines

Les choses fonctionnent moins bien : en général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Par exemple : $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

Il est toutefois possible de faire des réductions lorsqu'il s'agit des mêmes racines carrées.

Ex : écrire les expressions suivantes sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible

$$K = 3\sqrt{11} + 8\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$$

$$= 9\sqrt{11}$$

$$L = \sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$$

$$= -3\sqrt{5}$$

$$M = 2\sqrt{245} - 3\sqrt{500} + 7\sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{49 \times 5} - 3\sqrt{100 \times 5} + 7\sqrt{5}$$

$$= 2 \times 7\sqrt{5} - 3 \times 10\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

$$= 14\sqrt{5} - 30\sqrt{5} + 7\sqrt{5}$$

$$= -9\sqrt{5}$$

$$N = 2\sqrt{27} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75}$$

$$= 2\sqrt{3 \times 9} - 7\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{25 \times 3}$$

$$= 2 \times 3\sqrt{3} - 7 \times 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

$$= 6\sqrt{3} - 14\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$$

$$= -3\sqrt{3}$$

Ex : écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec c le plus petit possible

$$O = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= 2 + 2\sqrt{6} + 3$$

$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

$$P = (7 - \sqrt{5})^2$$

$$= 7^2 - 2 \times 7 \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2$$

$$= 49 - 14\sqrt{5} + 5$$

$$= 54 - 14\sqrt{5}$$

$$Q = (\sqrt{7} + 3)(3 - \sqrt{7})$$

$$= 3^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= 9 - 7$$

$$= 2$$

$$R = (2\sqrt{3} - 1)(5 - 4\sqrt{3})$$

$$= 10\sqrt{3} - 8(\sqrt{3})^2 - 5 + 4\sqrt{3}$$

$$= 14\sqrt{3} - 24 - 5$$

$$= 14\sqrt{3} - 29$$

Propriété : soient a et b deux nombres *strictement* positifs. On a $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Preuve : D'une part, $\sqrt{a+b}^2 = a+b$

D'autre part, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

D'où $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - \sqrt{a+b}^2 = a + 2\sqrt{ab} + b - (a+b)$

$$= a + 2\sqrt{ab} + b - a - b$$

$$= 2\sqrt{ab} \geq 0$$

Par conséquent, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq \sqrt{a+b}^2$ et donc $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

4° Compléments

① Racine carrée et carré : nous avons vu que $(\sqrt{x})^2 = x$ pour tout $x \geq 0$.

En revanche, $\sqrt{x^2}$ n'est pas nécessairement égale à x : par exemple, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \neq x$.

En fait, on peut écrire que $\sqrt{x^2} = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (valeur absolue de x)

$\Rightarrow$ De manière simplifiée, $|x|$ rend x positif : $|5| = 5$ et $|-5| = 5$

Donc si $x > 0$ alors $\sqrt{x^2} = x$ mais si $x < 0$ alors $\sqrt{x^2} = -x$ (pour que le résultat soit positif)

$$\begin{aligned} \text{Ex : } \sqrt{(-3)^2} &= \sqrt{9} & \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} &= -(2-\sqrt{7}) \quad \text{car } 2-\sqrt{7} < 0 \\ &= 3 \text{ c'est-à-dire } -(-3) & &= \sqrt{7} - 2 \end{aligned}$$

② Racine carrée et quotient : on évite habituellement les racines carrées au dénominateur...

Si le dénominateur est une racine carrée, c'est simple : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et sinon, on multiplie par la « forme conjuguée » du dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{2}{5-\sqrt{3}} &= \frac{2(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} & \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} &= \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{10+2\sqrt{3}}{25-3} & &= \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} \\ &= \frac{10+2\sqrt{3}}{22} & &= \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} \\ & & &= \sqrt{5}-\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bonus : $A = \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{25}}}}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{11 + 5}}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{5 + 4}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{9}} \\ &= \sqrt{1 + 3} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$