

CALCUL ALGÈBRE

I Développer une expression

C'est transformer un produit en somme.

1° Distributivité

Soient a, b, c et d des nombres quelconques.

$$\blacktriangleright a(b + c) = a \times b + a \times c$$

Ex : Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$A = 2x(5 - 3x)$$

$$= 2x \times 5 + 2x \times (-3x) \quad (\text{étape facultative})$$

$$= 10x - 6x^2$$

$$B = -5(-4x + 3)$$

$$= -5 \times (-4x) + (-5) \times 3 \quad (\text{étape facultative})$$

$$= 20x - 15$$

$$\blacktriangleright (a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Ex : Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$C = (4x - 3)(-5 + 2x)$$

$$= 4x \times (-5) + 4x \times 2x + (-3) \times (-5) + (-3) \times 2x \quad (\text{étape facultative})$$

$$= -20x + 8x^2 + 15 - 6x$$

$$= 8x^2 - 26x + 15$$

$$D = (5 - 2x)(x - 7)$$

$$= 5 \times x + 5 \times (-7) + (-2x) \times x + (-2x) \times (-7) \quad (\text{étape facultative})$$

$$= 5x - 35 - 2x^2 + 14x$$

$$= -2x^2 + 19x - 35$$

Cas particulier : lorsqu'une expression est précédée d'un signe « - », la distribution de ce signe « - » revient à changer tous les signes de l'expression qui suit. Et dans le cas de la double distributivité, il est judicieux de procéder en deux étapes : distribuer puis changer les signes...

Ex : Développer, réduire et ordonner l'expression suivante :

$$E = 2x(7 - x) - [(-5 + 3x)(x - 4)]$$

$$= 14x - 2x^2 - [-5x + 20 + 3x^2 - 12x]$$

$$= 14x - 2x^2 + 5x - 20 - 3x^2 + 12x$$

$$= -5x^2 + 31x - 20$$

2° Identités remarquables

Il s'agit de cas particuliers permettant entre autres de gagner du temps lors du développement de certaines expressions littérales.

Soient a et b deux nombres quelconques.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Preuve : prenons le cas de la 1^{ère} identité remarquable.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + a \times b + b \times a + b^2 \\ &= a^2 + a \times b + a \times b + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ex : Développer, réduire et ordonner l'expression suivante :

$$F = (9 + x)^2$$

$$= 9^2 + 2 \times 9 \times x + x^2$$

$$= 81 + 18x + x^2$$

$$G = (3 - 5x)^2$$

$$= 3^2 - 2 \times 3 \times 5x + (5x)^2$$

$$= 9 - 30x + 25x^2$$

⇒ L'objectif est de développer en UNE étape

Ex : Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

$$H = (5 + x)^2$$

$$= 25 + 10x + x^2$$

$$I = (x - 3)^2$$

$$= x^2 - 6x + 9$$

$$J = (2 + x)(2 - x)$$

$$= 4 - x^2$$

$$K = (3x + 4)^2$$

$$= 9x^2 + 24x + 16$$

$$L = (3 - 5x)^2$$

$$= 9 - 30x + 25x^2$$

$$M = (7x - 6)(7x + 6)$$

$$= 49x^2 - 36$$

$$N = (7 - 5x)(-2x + 3) - [(3x - 4)^2]$$

$$= -14x + 21 + 10x^2 - 15x - (9x^2 - 24x + 16)$$

$$= -14x + 21 + 10x^2 - 15x - 9x^2 + 24x - 16$$

$$= x^2 - 5x + 5$$

II Factoriser une expression

C'est transformer une somme en produit.

Autrement dit, c'est la transformation inverse du développement.

1° Avec un facteur commun

La méthode est simple :

1. Repérer le facteur commun (ou le faire apparaître)
2. Le recopier, puis recopier tout ce qui reste entre crochets, dans l'ordre
3. Réduire

Ex : Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} A = 5x^2 - 7x & B = 6x + 8 & C = 3x^2 - x & D = 5 - 10x \\ = x(5x - 7) & = 2(3x + 4) & = x(3x - 1) & = 5(1 - 2x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} E = (3x - 1)(5 - 3x) + (2 - x)(3x - 1) & F = (8 - x)(x + 5) - (x + 5)(2 - 3x) \\ = (3x - 1)[(5 - 3x) + (2 - x)] & = (x + 5)[(8 - x) - (2 - 3x)] \\ = (3x - 1)(7 - 4x) & = (x + 5)(8 - x - 2 + 3x) \\ & = (x + 5)(6 + 2x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} G = (2x + 3)^2 + (5 - 7x)(2x + 3) & H = (5 + 2x)(3x - 1) - (3x - 1)^2 \\ = (2x + 3)[(2x + 3) + (5 - 7x)] & = (3x - 1)[(5 + 2x) - (3x - 1)] \\ = (2x + 3)(8 - 5x) & = (3x - 1)(5 + 2x - 3x + 1) \\ & = (3x - 1)(6 - x) \end{array}$$

2° Avec les identités remarquables

S'il n'est pas possible de faire apparaître un facteur commun, on est peut-être face à une identité remarquable. C'est en tout cas une piste à creuser.

Regardons en détail deux exemples :

$$\begin{array}{ll} I = x^2 + 6x + 9 & J = 25 - 60x + 36x^2 \\ = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 & = 5^2 - 2 \times 5 \times 6x + (6x)^2 \\ = (x + 3)^2 & = (5 - 6x)^2 \end{array}$$

⇒ L'objectif est de factoriser en UNE étape

Ex : Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} K = x^2 + 12x + 36 & L = 49 - 14x + x^2 & M = x^2 - 64 \\ = (x + 6)^2 & = (7 - x)^2 & = (x - 8)(x + 8) \\ \\ N = 16x^2 - 24x + 9 & O = 25 + 90x + 81x^2 & P = 121 - 4x^2 \\ = (4x - 3)^2 & = (5 + 9x)^2 & = (11 - 2x)(11 + 2x) \end{array}$$

Remarques : 1. Toujours s'assurer que c'est vraiment une identité remarquable... Un professeur fourbe pourrait ainsi demander à ses élèves de factoriser $x^2 - 26x + 25$. L'erreur serait de répondre

$(x - 5)^2$ qui vaut $x^2 - 10x + 25$.

2. Pour certaines factorisations, il faudra attendre d'être en 1^{ère} pour avoir des méthodes plus élaborées. Ainsi, $x^2 - 26x + 25 = (x - 1)(x - 25)$

3. Et parfois, la factorisation n'est de toute façon pas possible tout court. C'est par exemple le cas de $x^2 + x + 1$.

Exercice : Factoriser les expressions suivantes :

$$Q = 4x^2 - 9 - (2x + 3)(x - 5)$$

$$= (2x - 3)(2x + 3) - (2x + 3)(x - 5)$$

$$= (2x + 3)[(2x - 3) - (x - 5)]$$

$$= (2x + 3)(2x - 3 - x + 5)$$

$$= (2x + 3)(x + 2)$$

$$S = 9x^2 - 5$$

$$= (3x)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$= (3x - \sqrt{5})(3x + \sqrt{5})$$

$$R = 81 - (4x - 3)^2$$

$$= 9^2 - (4x - 3)^2$$

$$= (9 - (4x - 3))(9 + (4x - 3))$$

$$= (9 - 4x + 3)(9 + 4x - 3)$$

$$= (12 - 4x)(6 + 4x)$$

$$(= 4(3 - x)2(3 + 2x))$$

$$(= 8(3 - x)(3 + 2x))$$

III Cas des expressions rationnelles

Pour « factoriser » une expression rationnelle, il suffit de tout mettre au même dénominateur.

Ex : Factoriser les expressions suivantes :

$$A = 4 + \frac{-3}{2x + 3}$$

$$= \frac{4(2x + 3) - 3}{2x + 3}$$

$$= \frac{8x + 12 - 3}{2x + 3}$$

$$= \frac{8x + 9}{2x + 3}$$

$$B = \frac{2}{3 - x} - \frac{3}{2x + 1}$$

$$= \frac{2(2x + 1) - 3(3 - x)}{(3 - x)(2x + 1)}$$

$$= \frac{4x + 2 - 9 + 3x}{(3 - x)(2x + 1)}$$

$$= \frac{7x - 7}{(3 - x)(2x + 1)}$$

$$(= \frac{7(x - 1)}{(3 - x)(2x + 1)})$$