

# NOMBRES

## I Ensembles de nombres

Pour dire qu'un nombre « appartient à » un ensemble, on utilisera le symbole  $\in$ .

$\mathbb{N}$  : entiers naturels

Ce sont tous les entiers positifs, zéro inclus :  $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$

Ex :  $0 \in \mathbb{N}$  et  $273 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt{9} \in \mathbb{N} \text{ car } \sqrt{9} = 3$$

$$\frac{28}{7} \in \mathbb{N} \text{ car } \frac{28}{7} = 4$$

$\mathbb{Z}$  : entiers relatifs

(de l'allemand Zahlen « nombres »)

Ce sont tous les entiers, qu'ils soient positifs ou négatifs

Ex :  $-12 \in \mathbb{Z}$  et  $12 \in \mathbb{Z}$

$$0 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-32}{8} \in \mathbb{Z} \text{ car } \frac{-32}{8} = -4$$

$\mathbb{D}$  : décimaux

Ce sont les nombres pouvant s'écrire  $\frac{a}{10^n}$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $a \in \mathbb{Z}$ .

Plus simplement, ce sont les nombres pouvant s'écrire avec un nombre *fini* de chiffres après la virgule.

$$\text{Ex : } 2.53 \in \mathbb{D} \quad \left( 2,53 = \frac{253}{100} = \frac{253}{10^2} \right)$$

$$-63,7 \in \mathbb{D} \quad \left( -63,7 = \frac{-637}{10} = \frac{-637}{10^1} \right)$$

$$\frac{-21}{140} \in \mathbb{D} \quad \left( \frac{-21}{14} = -0,15 = \frac{-15}{100} = \frac{-15}{10^2} \right)$$

Dispose-t-on de TOUS les nombres ? Non car  $0,33333333 \dots \notin \mathbb{D}$

$\mathbb{Q}$  : rationnels

Ce sont les nombres pouvant s'écrire  $\frac{a}{b}$  où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ .

Autrement dit, ce sont les fractions.

Ex :  $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$  et  $\frac{12}{-7} \in \mathbb{Q}$

$32,74 \in \mathbb{Q}$  car  $32,74 = \frac{3\,274}{100}$

$-14 \in \mathbb{Q}$  car  $-14 = \frac{-14}{1}$

En fait, tous les nombres décimaux sont des rationnels, tout les comme nombres entiers.

*Pour Pythagore (environ -500 avant J-C), il n'existait pas d'autres nombres, ou en tout cas, il ne fallait pas en parler... Mais la longueur de la diagonale d'un simple carré de côté 1 posait alors un réel problème. Il fallut attendre Euclide (environ -300 avant J-C) pour l'une des premières démonstrations de l'irrationalité de  $\sqrt{2}$ .*

$\mathbb{R}$  : réels

Ce sont tous les nombres connus (pour le moment...)

Cet ensemble contient donc tous les rationnels, ainsi que d'autres nombres qui sont donc

« irrationnels » tels que  $\pi$  et  $\sqrt{2}$  par exemple (nous le prouverons plus tard)

Ainsi, comme l'a dit Sergey Bernikov, l'ensemble  $\mathbb{R}$  a été inventé pour boucher les trous de  $\mathbb{Q}$ .

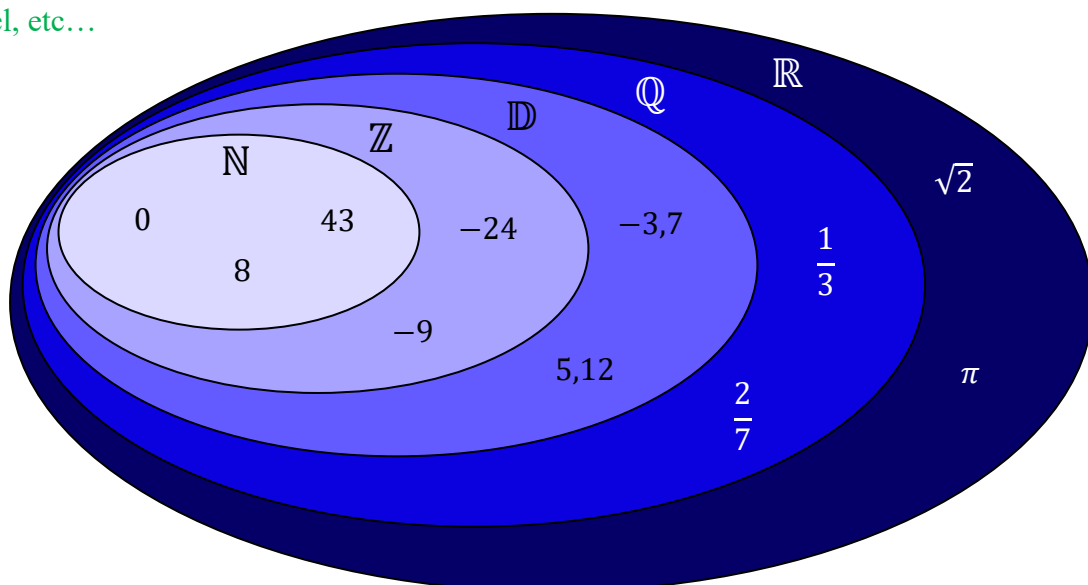
Remarque : dans les irrationnels, il existe divers sous-ensembles :

- Les nombres algébriques : ils peuvent s'écrire comme solutions d'équations polynomiales. On dispose donc avec eux d'une approche « classique ».  
C'est par exemple le cas de  $\sqrt{2}$  qui est une solution de l'équation  $x^2 - 2 = 0$
- Les nombres transcendants : impossible de les écrire comme solutions d'équations polynomiales, ce qui les rend plus difficiles à apprivoiser...  $\pi$  est un nombre transcendant.

Tous ces ensembles sont de plus en plus gros, et ils sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Autrement dit, tout nombre entier est également décimal, tout nombre décimal est rationnel, tout entier est rationnel, etc...



Notations : on peut également trouver les notations suivantes si besoin :

$\mathbb{R}_+$  : ensemble des réels positifs (0 inclus donc) (idem pour  $\mathbb{R}_-$ )

$\mathbb{R}^*$  : ensemble des réels non nuls (on peut le noter  $\mathbb{R}\setminus\{0\}$  ou bien  $\mathbb{R} - \{0\}$ )

$\mathbb{N}^*$  : ensemble des entiers naturels non nuls (à partir de 1 donc)

$(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  signifie que  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  signifie que  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{Z}$

## II Arrondis

Il est parfois pratique de donner une valeur approchée d'un nombre : elle se note avec le symbole  $\approx$  (non : ce n'est pas «  $\simeq$  » !). En général, on donne une valeur approchée d'un nombre par arrondi avec une certaine précision (indiquée dans l'énoncé normalement...)

Arrondi à l'unité : pas de chiffres après la virgule.

Arrondi au dixième / à 0,1 près / à  $10^{-1}$  près : un chiffre après la virgule.

Arrondi au centième / à 0,01 près / à  $10^{-2}$  près : deux chiffres après la virgule.

$\Rightarrow$  Il suffit de compter le nombre de zéros pour déterminer le nombre de chiffres après la virgule :

dix millièmes  $\rightarrow$  10 000  $\rightarrow$  quatre zéros  $\rightarrow$  quatre chiffres après la virgule

La règle est de regarder le 1<sup>er</sup> chiffre qui succède la précision demandée : si c'est 0, 1, 2, 3 ou 4 on ne change rien, mais si c'est 5, 6, 7, 8 ou 9, alors on ajoute « 1 » au chiffre de la précision demandée.

Ex : Déterminer un arrondi de  $\sqrt{3}$  au dixième.

La calculatrice indique que  $\sqrt{3} \approx 1,73205 \dots$

On veut un chiffre après la virgule : cela donne 1,7. Le chiffre qui succède est le chiffre 3 : il n y a rien de plus à faire. Donc  $\sqrt{3} \approx 1,7$  par arrondi au dixième.

Ex : Déterminer un arrondi de  $\pi$  au millième.

La calculatrice indique que  $\pi \approx 3,14159 \dots$

On veut trois chiffres après la virgule : cela donne 3,141. Le chiffre qui succède est le chiffre 5 : il faut donc ajouter « 1 ». Donc  $\pi \approx 3,142$  par arrondi au millième.

Remarque : on peut également donner des encadrements :  $3,1 < \pi < 3,2$  à  $10^{-1}$  près

$3,14 < \pi < 3,15$  à  $10^{-2}$  près

$3,141 < \pi < 3,142$  à  $10^{-3}$  près