

PRODUIT SCALAIRE 2

- 1** On construit le triangle EFG comme sur la figure ci-contre, dans lequel on note H le pied de la hauteur issue de F. On suppose que $EF = 5$, $EH = 3$ et $HG = 7$. Calculer :
- a. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH}$ b. $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH}$ c. $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HE}$
 d. $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}$ e. $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{FG}$

- 2** Soit ABCD un carré de centre O et de côté 5. Soit I le milieu de [BC] et J le milieu de [CD]. Calculer :
- a. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$
 b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{IB}$

- 3** Soit A, B et C trois points tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$.
1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$.
 2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{AC})$ et $(3\overrightarrow{AB}) \cdot (4\overrightarrow{AC})$.

- 4** Soit ABC un triangle isocèle en A. Montrer que $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

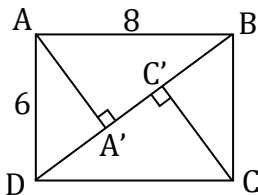
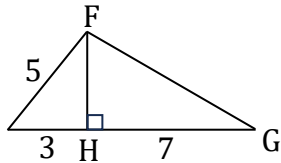
- 5** ABCD est un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$. On note O le centre de ce losange.

1. a. En introduisant le point O, calculer $\overrightarrow{AB}^2$.
 b. En déduire la longueur AB.
 2. Calculer les produits scalaires suivants :
 a. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 b. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{OC}$.

- 6** ABCD est un rectangle tel que $AB = 8$ et $AD = 6$.

On note A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur [DB].

1. Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ avec la relation de Chasles en faisant apparaître le vecteur $\overrightarrow{A'C'}$.
 2. a. Montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD}$.
 b. Montrer que $AD^2 - AB^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.
 3. Déduire des questions précédentes la longueur du segment [A'C'].



- 7** Sur le cercle trigonométrique de centre O, on place les points A et B associés aux réels $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.
1. Calculer les coordonnées des points A et B.
 2. a. Déterminer la mesure de $\widehat{AOB}$ en radians.
 b. En calculant de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$, déterminer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$. En déduire $\sin \frac{\pi}{12}$.

- 8** ABCD est un carré, tel que I et J sont les milieux des côtés [AB] et [BC]. Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

- 9** ABC est un triangle équilatéral. Les points E et F sont tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
1. En utilisant la relation de Chasles, décomposer $\overrightarrow{EF}$ en faisant apparaître $\overrightarrow{AC}$.
 2. Montrer que les droites (EF) et (AC) sont Perpendiculaires.

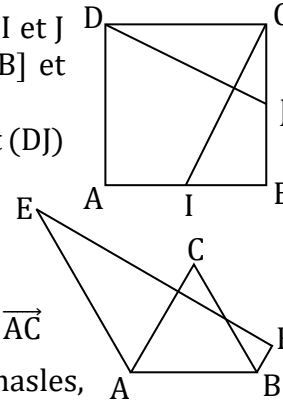
- 10** On considère les points : A(-4 ; 6) ; B(8 ; -4) et C(1 ; 3). Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- 11** On considère les points A(-5 ; 2), B(7 ; -3) et C(-11 ; -6).

- a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
 b. Calculer $\overrightarrow{AB}^2$ et en déduire $\|\overrightarrow{AB}\|$.
 c. Calculer $\|\overrightarrow{AC}\|$ et en déduire $\overrightarrow{AC}^2$.

- 12** On considère les points D(-3 ; 3), E(-7 ; 5) et F(-4 ; 1). Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF}^2$ et $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{ED}$.

- 13** On considère les points suivants :
 $G\left(-2; \frac{5}{4}\right)$; $H\left(-\frac{1}{3}; -\frac{3}{4}\right)$; $I\left(1; \frac{7}{4}\right)$
 Calculer $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{HG}^2$ et $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{HI}$.



- 14** Soit J(-√2 ; 1), K(1 ; √2 + √3) et L(1 ; 2 - √3) trois points.

Calculer $\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{JL}$, $\overrightarrow{LO} \cdot \overrightarrow{JO}$, $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{JO}$.

- 15** On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $2\vec{u} \cdot (-3\vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w})$.

- 16** On considère les vecteurs suivants :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}; \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{w} \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.
 2. Déterminer le réel m tel que les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

- 17** Soit les points E(-1 ; 3), F(3/2 ; 5/2) et G(1 ; 0).

1. Calculer $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}$.
 2. Calculer GE et GF.
 3. En déduire la mesure exacte en radians de l'angle $\widehat{EGF}$.

- 18** Soit les points A(-2 ; 3), B(7 ; 0), C(4 ; 5) et D(2 ; -1).

Montrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

- 19** Soit les points A(√3 ; 3), B(1 ; 2√3) et C(2 ; 1). Montrer que (AB) et (OC) ne sont pas perpendiculaires.

- 20** Soit les points A(2 ; 4), B(-4 ; 6), C(-2 ; 0) et D(4 ; -2).

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 2. Calculer $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 3. Calculer $\overrightarrow{AC}^2$ et $\overrightarrow{BD}^2$.
 4. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

- 21** Soit le triangle EFG tel que E(0 ; 1), F(8 ; -3) et G(12 ; 5).

Le point H(7 ; 0) appartient-il à la hauteur issue de F ?

22 Soit les points $A(-4 ; 1)$ et $B(3 ; 0)$. Déterminer les coordonnées du point C tel que le triangle ABC soit rectangle en A et C appartienne à l'axe des ordonnées.

23 Soit les points $A(-6 ; 4)$, $B(-2 ; 2)$ et $C(5 ; -7)$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. On note H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Calculer BC . En déduire BH et HC .

24 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1 ; 3)$, $B(-3 ; 2)$ et $C(6 ; -4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
2. En déduire une valeur approchée, au degré près, des mesures des angles du triangle ABC .

25 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $D(-1 ; 3)$, $E(-1 ; -1)$ et $F(5 ; 1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{ED}$.
2. En déduire une valeur approchée, au degré près, des mesures des angles du triangle DEF .

26 Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant l'expression du produit scalaire la plus adaptée.

1. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 9$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$.
3. ABC est un triangle équilatéral de côté 5.
4. Les trois points A , B et C sont tels que $AB = 8$, $BC = 4$ et B appartient au segment $[AC]$.
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, $A(1 ; 7)$, $B(-2 ; 9)$ et $C(3 ; 8)$.
6. Le cercle de diamètre $[BC]$ passe par A .
7. $ABCD$ est un losange de centre O dans lequel la diagonale $[AC]$ mesure 20 cm.
8. $ABCD$ est un rectangle dans lequel $AB = 8$.

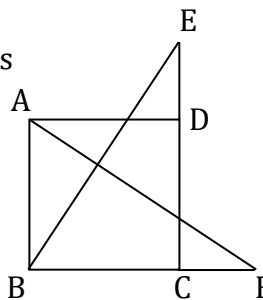
27 $ABCD$ est un carré de côté 1.

On construit les points E et F tels

que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2} \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$

Démontrer que (AF) et (BE) sont perpendiculaires :

- a. en décomposant $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$
- b. en se plaçant dans le repère orthonormé $(B ; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



28 Soit les points $A(2 ; 7)$, $B(6 ; 5)$ et $C(4 ; 1)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on en conclure pour le cercle de diamètre $[AC]$?

29 Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

1. Soit les points $N(0 ; 2)$ et $P(-5 ; 9)$. Le point $M(1 ; 8)$ appartient au cercle de diamètre $[NP]$.
2. Soit les points $A(4 ; 2)$, $B(0 ; -2)$. Le point $C(2 ; \sqrt{8})$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

30 Soit A et B deux points tels que $AB = 4$, et soit I le milieu de $[AB]$.

1. Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

2. Application : dans chacun des cas suivants, déterminer et construire l'ensemble des points M du plan vérifiant la relation proposée.

- a. $MA^2 - MB^2 = 16$
- b. $MA^2 - MB^2 = -8$

31 On considère un triangle ABC tel que $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On nomme I , J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Montrer que, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

2. Montrer que les hauteurs du triangle ABC issues de A et B sont sécantes en un point H . En déduire que ces trois hauteurs sont concourantes.

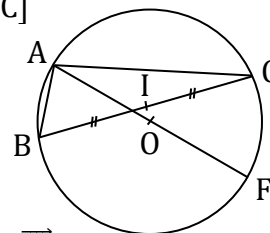
32 Soit trois points A , B et C sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O . Soit I le milieu de $[BC]$ et F le point diamétralement opposé à A sur le cercle.

1. Démontrer que :

- a. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = AB^2$
- b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = AC^2$

2. a. Justifier que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

b. En déduire que $AB^2 + AC^2 = 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AF}$



33 $ABCD$ est un carré de côté 3.

Les points M , N , P et Q appartiennent respectivement aux côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ et sont tels que $AM = BN = CP = DQ = 1$.

1. En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$, calculer $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ}$

2. À l'aide de produits scalaires similaires, en déduire que $MNPQ$ est un rectangle.

3. Démontrer que $MN = NP$.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $MNPQ$?

5. Montrer que les quadrilatères $ABCD$ et $MNPQ$ ont le même centre.

