

VARIABLES ALÉATOIRES

1 Une urne contient 5 boules jaunes, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On tire simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges obtenues.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Décrire l'événement $\{X = 2\}$, puis l'événement $\{X < 1\}$.

2 On lance un dé à six faces. On gagne 3 points si la face affichée est un multiple de 3, sinon on perd 1 point. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le nombre de points gagnés (ce nombre peut être négatif).

- Écrire l'événement « on obtient la face 3 » sous la forme $\{X = a\}$ où a est un nombre à déterminer.
 - De même, écrire l'événement « on obtient la face 4 » sous la forme $\{X = b\}$ où b est un nombre à déterminer.
- Quelles sont les issues de l'expérience aléatoire qui correspondent à l'événement $\{X = -1\}$?

3 On lance quatre dés à six faces. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer de ces quatre dés, associe le nombre de faces numérotées « 6 » obtenues.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Que peut-on dire des événements $\{X \leq 2\}$ et $\{X < 3\}$?

4 Un carton contient 5 billes jaunes, 3 billes rouges et 4 billes vertes. On tire simultanément 3 billes du carton. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de 3 billes, associe le nombre de billes vertes obtenues.

- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Décrire l'événement $\{X = 2\}$, puis l'événement $\{X \geq 1\}$.

5 Une boîte contient quatre jetons marqués « 1 », « 2 », « 3 », « 4 ». On en tire un jeton au hasard. Si le nombre marqué est pair, on gagne un nombre de points égal au double de ce nombre. Et si le nombre marqué est impair on perd un nombre de points égal au nombre marqué.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque issue, associe le nombre de points gagnés.

- Quelle est l'issue qui permet de gagner 4 points ?
- Quelle est l'issue qui correspond à l'événement $\{X = -3\}$? Que vaut $p(X = -3)$?
- Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X < 4\}$? Que vaut $p(X < 4)$?

6 On place dans un sac cinq étiquettes sur lesquelles est écrit un mot de la phrase ci-dessous.

LE HASARD CONDUIT LE MONDE

On tire une étiquette au hasard du sac et on compte le nombre de voyelles du mot.

- À quelle variable aléatoire X peut-on s'intéresser ?
- Quelles sont les valeurs prises par X ?
- Quelles sont les issues qui correspondent à l'événement $\{X = 2\}$?

7 On lance deux pièces de monnaie : on gagne 1 € si on obtient deux fois « pile », sinon on perd 1 €.

- À quelle variable aléatoire G peut-on s'intéresser ?
- Quelles sont les valeurs prises par G ?
- Quelles sont les issues de l'expérience aléatoire correspondant à l'événement $\{G = -1\}$?

8 Une urne contient quatre boules ; une rouge et trois noires. On tire une boule au hasard. On gagne 2 € si la boule tirée est rouge et on perd 1 € si la boule tirée est noire.

- Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir une boule rouge » ?
- Soit X la variable aléatoire, qui à chaque tirage d'une boule, associe le gain du joueur. Déterminer $p(X = 2)$ et $p(X = -1)$.

9 Un buraliste délivre à chacun des passages de ses clients à la caisse, une carte comportant deux zones de grattage ; pour chaque zone, la probabilité de découvrir « gagné » est 0,05.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque passage en caisse, associe le nombre de zones gagnantes.

- Déterminer $p(X = 0)$ et $p(X = 2)$.
- En déduire $p(X = 1)$.

10 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	1	4	6
$p(X = x_i)$	a	0,4	0,5

- Calculer le réel a .
- Déterminer $p(X < 6)$ par deux méthodes différentes.

11 Yassine paye une mise de 2 € puis il choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes :

- si la carte est un « As », il reçoit 5 €
- si la carte est une figure (valet, dame ou roi), il reçoit 3 €
- dans les autres cas il perd sa mise

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage d'une carte, associe le gain de Yassine. Ce gain est positif ou négatif et tient compte de la mise de départ. Expliquer et compléter le tableau suivant

x_i	3	1	...
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{32}$	$\frac{12}{32}$	...

aléatoire X .

12 Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de caisses en service à l'ouverture d'un supermarché. La loi de probabilité de N est donnée par le tableau ci-après.

a	1	2	3	4	5
$p(N = a)$	0,2	0,3	0,3	0,1	m

- Déterminer le réel m .
- Calculer $p(N \geq 3)$ et donner une interprétation de ce nombre.

13 Vincent télécharge au plus cinq jeux par mois sur son smartphone. On note N la variable aléatoire qui, à un mois donné, associe le nombre de jeux téléchargés. La loi de N est donnée par le tableau ci-dessous.

n_i	0	1	2	3	4	5
$p(N = n_i)$	0,13	0,28	...	0,07	0,3	0,1

- Calculer la probabilité manquante.
- Quelle est la probabilité que Vincent télécharge :
 - au moins 3 jeux ?
 - au plus 4 jeux ?

14 Soit X la variable aléatoire qui, à chaque élève de 1^{ère}, associe le nombre de connexions k un jour donné à l'ENT de son lycée. La loi de X est donnée dans le tableau ci-dessous.

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,15	0,38	0,35	a	0,03

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.

- La valeur de a est 0,09.
- $p(X \leq 2) = 0,88$.
- La probabilité que l'élève se connecte au moins une fois est égale à 0,47.

15 Un commercial vend entre 0 et 4 pompes à chaleur en une semaine. Soit X la variable aléatoire qui, à une semaine donnée, associe le nombre k de pompes à chaleur vendues. La loi de probabilité de X est donnée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$p(X = k)$	0,26	0,23	...	0,15	0,05

- Calculer la probabilité de vendre exactement deux pompes à chaleur en une semaine.
- Déterminer la probabilité de vendre au moins deux pompes à chaleur en une semaine.

16 Camille enregistre cinq morceaux différents dans son smartphone. Le temps d'écoute de chacun d'eux est donné dans le tableau suivant :

Morceau	A	B	C	D	E
Temps (s)	280	200	240	240	200

L'application de lecture sélectionne au hasard un des cinq morceaux. Tous les morceaux ont la même probabilité d'être sélectionnés.

On note X la variable aléatoire qui, à tout morceau sélectionné, associe le temps d'écoute de ce morceau. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X .

17 Une machine est alimentée en résistances de 1 et 2 ohms. Elle doit souder successivement trois résistances en série : deux résistances de 2 ohms puis une de 1 ohm. Cette machine est déréglée et elle soude trois résistances au hasard.

Un résultat est noté sous la forme d'un triplet. Par exemple, le triplet (1 ; 1 ; 2) correspond au cas où les deux premières résistances soudées sont des résistances de 1 ohm et la troisième est une résistance de 2 ohms.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque triplet, associe la somme des valeurs des trois résistances. Donner la loi de probabilité de X .

18 Un sac contient 26 jetons marqués chacun avec une des 26 lettres de l'alphabet. On tire un premier jeton, puis un second jeton sans remettre le premier dans le sac. On gagne 5 € par voyelle tirée et on perd 1 € par consonne tirée.

- Construire un arbre pondéré illustrant cette expérience.
- Quelles sont les valeurs possibles du gain algébrique du joueur ?
- Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux jetons, associe le gain algébrique du joueur.

19 Une entreprise fabrique des bouées gonflables dont certaines peuvent présenter de 1 à 3 défauts. On appelle N la variable aléatoire qui, à chaque bouée, associe le nombre de défauts de la bouée. La loi de N est donnée par le tableau ci-dessous :

n_i	0	1	2	3
$p(N = n_i)$	0,89	0,08	0,02	0,01

Vérifier que $E(N) = 0,15$.

20 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Calculer l'espérance mathématique de X .

21 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	-1	0	2
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

a. Calculer l'espérance de X , notée $E(X)$.

b. Vérifier que $V(X) = 1,09$ puis calculer $\sigma(X)$, en arrondissant au centième.

22 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	-1	0	2
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Calculer l'espérance de X , sa variance et une valeur approchée à 10^{-2} près de son écart-type.

23 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre.

x_i	-1	0	2
$p(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Déterminer le réel a , puis calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .

24 On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'apparition de « PILE » est $\frac{1}{3}$.

Le joueur gagne 9 € si la face visible est « PILE » sinon il perd 3 €. On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur.

- Établir la loi de probabilité de G .
- Calculer l'espérance mathématique de G , sa variance et son écart-type.

25 Un forain propose un jeu de hasard. Il dispose de 20 cartes : deux sont vertes, dix sont bleues et les cartes restantes sont rouges. Les cartes sont posées face cachée et un joueur en choisit une :

- si elle est verte, le joueur gagne 50 €
- si elle est bleue, rien ne se passe
- si elle est rouge, le joueur perd a €.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur en euros.

Calculer a pour que le jeu soit équitable.

26 Le gérant d'un casino désire créer un nouveau jeu. Un participant doit au préalable miser 5 €. Une fois la mise donnée, il lance deux dés à six faces et on soustrait le plus petit nombre obtenu au plus grand (résultat toujours positif ou nul). Si le résultat est supérieur ou égal à 3, alors le joueur reçoit n euros sinon il perd sa mise.

1. Montrer que la probabilité que le joueur perde sa mise est $\frac{2}{3}$.
2. En déduire la probabilité que ce joueur gagne la partie.
3. Déterminer la plus grande valeur de n (à l'euro près) afin que ce jeu reste avantageux pour le casino.

27 Un théâtre propose chaque jour un spectacle au prix de 20 €. Pour en assurer la promotion, chaque client lance, à l'entrée, un dé à six faces non truqué. Si le dé affiche « 6 » son entrée est gratuite, s'il affiche « 1 » l'entrée est demi-tarif, sinon, le client paye plein tarif.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat du lancer de dés, associe le prix payé par le client.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X .
3. Que peut-on en déduire concernant la recette, si la salle composée de 2 000 places est pleine ?

28 Deux tombolas sont organisées par une association. Pour chacune d'entre elles, 100 billets ont été édités et sont vendus 5 € pièce.

La tombola « Extra » permet de gagner un lot d'une valeur de 200 € et dix lots d'une valeur de 20 €. La tombola « Multi » permet de gagner deux lots de 25 €, dix lots de 15 € et trente lots de 10 €. Pour les deux tombolas, tous les billets sont vendus.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à chaque billet acheté, associe le gain algébrique du joueur avec la tombola « Extra » (respectivement « Multi »).

1. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
2. Léa décide d'acheter des billets à la tombola « Extra ». Que peut-on dire de son choix ?

29 Le coût de production d'un objet est de 950 €. Cet objet peut présenter un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut B. La garantie permet de faire les réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 € pour le défaut A et 150 € pour le défaut B. On admet que 90 % des objets produits n'ont aucun défaut, 4 % ont le seul défaut A, 2 % ont le seul défaut B et 4 % ont les deux défauts A et B.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est-à-dire son coût de production augmenté du coût de réparation éventuel. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type de cette variable aléatoire. Que représente $E(X)$ pour l'usine ?
3. On admet que tous les objets produits sont vendus.
 - a. L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant chaque objet à 960 € ?
 - b. L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 € par objet. Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de chacun d'eux.

30 Un jeu consiste à miser 10 €, puis à réaliser un tirage en deux étapes.

1^{ère} étape : le joueur tire au hasard un billet dans un panier contenant dix billets marqués « U_1 » et deux billets marqués « U_2 ».

2^{ème} étape : – si le joueur obtient un billet « U_1 », il tire un jeton dans l'urne U_1 dans laquelle se trouvent dix jetons « Perdant » et deux jetons « Gagnant ».

– si le joueur obtient un billet « U_2 », il tire un jeton dans l'urne U_2 dans laquelle se trouvent sept jetons « Perdant » et cinq jetons « Gagnant ».

On note A l'événement « le joueur a tiré un billet marqué U_1 » et G l'événement « le joueur a tiré un jeton Gagnant ».

1. Construire un arbre pondéré qui décrit ce jeu.
2. Calculer la probabilité des événements $G \cap A$ et $G \cap \bar{A}$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{5}{24}$.
4. Déterminer $p_G(A)$.
5. Le joueur reçoit 35 € s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_1 et 60 € s'il obtient un jeton gagnant de l'urne U_2 . Sinon il ne reçoit rien et perd sa mise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain algébrique du joueur.
 - a. Quelles sont les valeurs prises par X ?
 - b. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - c. Ce jeu est-il équitable ?