

FONCTION EXPONENTIELLE

1 1. Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^{A(x)}$.

a. $e^{5x+2} \times e^{x-5}$ b. $\frac{e^{x^2+1}}{e^{x+2}}$ c. $(e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3$

2. Démontrer que pour tout réel x :

$$\frac{1 + e^{2x}}{1 + e^x} = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} + 1}$$

2 Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^{E(x)}$, où $E(x)$ est une expression et x un réel.

A = $e^{1+x} \times e^x$

B = $e^{2-x} \times e^{3-x}$

C = $(e^{-x})^2 \times e^{0,1x}$

D = $(e^{1+x})^2 \times e^{-x}$

E = $e \times e^{5-0,1x}$

F = $(e^{x+1})^3 \times e^{0,3x}$

G = $\frac{1}{e^{-7+0,2x}}$

H = $\frac{e^{2x-5}}{e^{x+5}}$

I = $\frac{e^{-x+1}}{e^{x-3}}$

J = $\frac{e \times e^{3x-1}}{e^{x+1}}$

K = $\frac{e^x \times e^{x+1}}{e^{x-1}}$

L = $\frac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$

3 Démontrer les égalités pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. $3e^{2x} - 8e^x - 3 = (1 + 3e^x)(e^x - 3)$

2. $\frac{e^{1+2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{e^{1+x}}{e^{-x} + e^x}$ 3. $1 - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{1 + e^x}$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $e^{2x} = e^5$ b. $e^x = e$ c. $e^x = e^{-x}$

5 Parmi les équations suivantes, lesquelles n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$? Justifier.

a. $e^x = 0$ b. $e^{x+1} = -1$

c. $e^x + 1 = 0$ d. $e^x - 1 = 0$

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations proposées.

a. $e^{x^2} = e^x$ b. $e^{-2x} - 1 = 0$

c. $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$ d. $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$

e. $3e^{3x-42} + 1 = 4$ f. $e^{5x} = e^{-x} \times e^{-1}$

7 1. Résoudre l'équation $X^2 + 6X - 7 = 0$.

2. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$

8 1. Démontrer que l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ est équivalente à l'équation $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$.

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $e^{x+1} \leq e^5$ b. $e^{3-x} > e^2$ c. $e^{-x} < e^4$

10 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

a. $1 \leq e^{3x}$ b. $e^{-x^2} - e \times e^{7x-9} \leq 0$

c. $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ d. $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

11 Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de :

A(x) = $0,5 + e^x$

B(x) = $1 + 0,5e^x$

C(x) = $-10e^x$

D(x) = $-1 - e^x$

E(x) = $e^x(2 + e^x)$

F(x) = $-2e^{-x-1}$

G(x) = $\frac{e^x}{e^x + 1}$

H(x) = $0,3e^{1-0,7x}$

I(x) = $1 + 5e^{-17x}$

J(x) = $5e^x - xe^x$

K(x) = $x^2e^x - xe^x$

L(x) = $e^x - 2xe^x$

M(x) = $xe^{-x} - x^2e^{-x}$

N(x) = $4e^{-x} - x^2e^{-x}$

O(x) = $xe^x - e^{x+2}$

P(x) = $x^2e^x - e^{x+2}$

Q(x) = $\frac{e^x - xe^x}{e^x + 1}$

R(x) = $\frac{xe^x}{e^x + 1}$

12 1. Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$.

3. En déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

13 1. Démontrer que pour tout réel x :

$$-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$$

2. En déduire le signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

14 1. Factoriser le polynôme du second degré $-5X^2 + 3X + 2$.

2. En déduire une factorisation de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$

3. Étudier le signe de $-5e^{2x} + 3e^x + 2$ sur $\mathbb{R}$.

15 On a étudié la croissance du bar en élevage. L'expression approximative de sa masse (en kg), en fonction du temps x (en années écoulées depuis l'éclosion), est $T(x) = 4(1 - e^{-0,14x})$.

1. Montrer que pour tout réel x positif, $T(x) < 4$.

2. Interpréter ce résultat.

16 Calculer la dérivée de chacune des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = 2e^x$ $g(x) = 2 - e^x$ $h(x) = 2x + e^x$

17 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + 3e^x$ sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Justifier que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Même question avec $f(x) = 3x + 2e^x$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - x - 5e^x$$

a. Vérifier que $f'(x) = -1 - 5e^x$ pour tout réel x .

b. En déduire le sens de variation de f .

19 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5 - x)e^x$$

a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis construire le tableau de variation de f .

c. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de f .

2. Mêmes questions avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 1$.

3. Mêmes questions avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2e^x}$

1. Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $2x - x^2$.

2. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

21 Soit f la fonction définie par $f(x) = (e^x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x .

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ puis sur $[0 ; +\infty[$.

22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f .

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3.

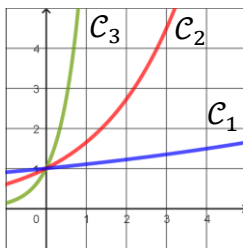
23 Soit f la fonction définie sur $[2 ; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 3}$$

1. Montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.
2. En déduire le tableau de variation de f .

24 1. Soit k et m deux réels tels que $0 < k < m$. Etudier le signe de $e^{kx} - e^{mx}$ sur $\mathbb{R}$.

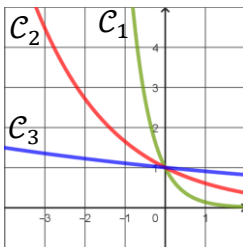
2. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{0,5x}$, $g(x) = e^{0,1x}$ et $h(x) = e^{2x}$.



On a représenté ci-contre ces trois fonctions. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

25 1. Soit k et m deux réels tels que $0 < k < m$. Etudier le signe de $e^{-kx} - e^{-mx}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-0,5x}$, $g(x) = e^{-0,1x}$ et $h(x) = e^{-2x}$.



On a représenté ci-contre ces trois fonctions. Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

26 Soit f la fonction définie par $f(t) = e^{0,05t}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

27 Soit g la fonction définie par $g(t) = e^{-203t}$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

28 Soit f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{0,1x}$, $f_2(x) = e^{-10x}$, $f_3(x) = e^{-x+1}$ et $f_4(x) = e^{2x-3}$. Parmi ces fonctions, lesquelles sont croissantes sur $\mathbb{R}$? Justifier.

29 La fonction f est définie par $f(x) = xe^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$

1. Montrer que pour tout x , $f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe $\mathcal{C}_f$.

30 Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de la fonction f .

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 20xe^{-0,1x+3}$.
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-x+1}$.
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + 2x)e^{3x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.

32 Déterminer le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 2 + e^{-2x+1}$.

33 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2e^{-0,8x}$ sur $\mathbb{R}$, et soit (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.

2. Même chose avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{5}x}$

3. Même chose avec la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 100e^{-x+2}$

34 On s'intéresse à la croissance d'une ville depuis le 1^{er} janvier 2019. L'évolution de sa population est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-0,05x}}$ où $f(x)$ est le nombre d'habitants, en centaines de milliers, au 1^{er} janvier de l'année 2019 + x .

1. Quel est le nombre d'habitants en 2019 ?
2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$.
b. Déterminer le sens de variation de f
3. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de f . Par lecture graphique, déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants.

35 Soit brioche qui était dans une étuve à 30 °C est placée dans un four chauffé à 180 °C pendant 35 minutes.

La température au cœur de la brioche (exprimée en degrés Celsius) est modélisée sur l'intervalle $[0 ; 35]$ par une fonction du temps t (exprimé en minutes) de la forme $f(t) = ae^{-0,022t} + 180$.

1. Sachant que $f(0) = 30$, calculer la valeur de a .
2. a. Justifier que $f'(t) = 3,3e^{-0,022t}$ pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 35]$.
b. En déduire les variations de f sur $[0 ; 35]$.
c. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire en minutes pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C.

36 *Menace d'extinction du* 🦔 *européen*

La fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 80]$ par $f(x) = 35e^{-0,053x}$ modélise l'évolution du nombre de hérissons (exprimé en millions) l'année 1950 + x , au Royaume-Uni. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et f' sa dérivée.

1. a. Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0 ; 80]$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ et construire le tableau de variation de f sur $[0 ; 80]$.
c. Tracer $\mathcal{C}_f$ à la calculatrice.
2. a. Des études statistiques démontrent que la population de hérissons est passée d'environ 35 millions en 1950 à 1 million en 2017, au Royaume-Uni. Retrouver ces résultats à l'aide du modèle proposé.
b. Résoudre l'inéquation $f(x) < 10$ par lecture graphique. Interpréter ce résultat.
3. On pose $u_n = f(n)$, pour tout entier naturel n . Montrer que la suite (u_n) est géométrique.