

PRODUIT SCALAIRE 1

1 Soit un triangle ABC tel que $AB = 3$, $AC = 8$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2 Soit un triangle EFG tel que $FG = 2$, $GE = 11$ et $\widehat{EGF} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF}$.

3 Soit un triangle DEF tel que $ED = 7$, $DF = 7$ et $\widehat{FDE} = \frac{3\pi}{4}$. Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

4 Soit un triangle ABC. Calculer AB sachant que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$.

5 Soit un triangle GHI isocèle en H. Calculer HI sachant que $\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{HG} = 18\sqrt{3}$, $AC = 6$ et $\widehat{IHG} = \frac{\pi}{6}$.

6 Soit un triangle équilatéral ABC de côté 5 et I le milieu de [BC].

- Montrer que $AI = \frac{5\sqrt{3}}{2}$
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BC}$

7 Déterminer une valeur approchée à 1 degré près de l'angle $\widehat{ACB}$ sachant que :

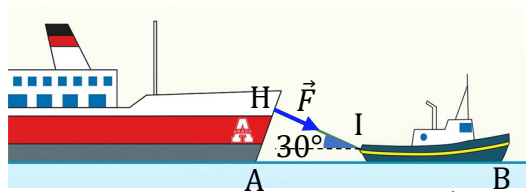
- $CA = 5$, $CB = 8$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$.
- $CA = 12$, $CB = 5$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -9$.

8 Déterminer la longueur CA sachant que :

- $CB = 2\sqrt{5}$, $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2$
- $CB = \sqrt{5}$, $\cos(\widehat{BCA}) = \frac{-3}{5}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$

9 Le travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{AB}$. Sur le schéma ci-dessous, le câble du remorqueur exerce sur le paquebot une force

constante $\vec{F}$ d'une intensité de 9 millions de newtons lors d'un déplacement du point A au point B de longueur 1 000 m.

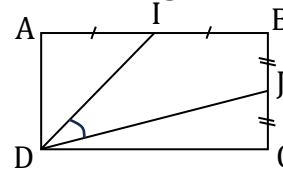


Quel est le travail de la force $\vec{F}$ durant le déplacement de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

10 Vrai ou faux ? Justifier.

- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- Si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB^2$.
- Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$, alors l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

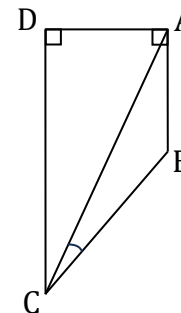
11 Soit un rectangle ABCD tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [BC].



- Calculer $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{DJ}$ en décomposant $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$.
- En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{IDJ}$.

12 ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 3$, $AD = 5$ et $DC = 7$.

- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
- En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DB}$, calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
- Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et en déduire une valeur de la mesure l'angle $\widehat{ACB}$, arrondie au degré près



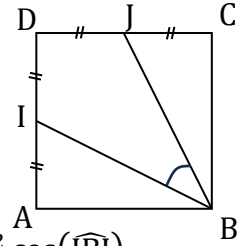
13 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$.

- Déterminer $\vec{v} \cdot \vec{u}$
- Calculer $(\vec{u} - \vec{v})^2$.
- Calculer $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

14 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de normes respectives 2 et 5, et tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

- Calculer $(4\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + 5\vec{v})$
- Calculer $(-\vec{u} - 7\vec{v}) \cdot (3\vec{v} + 4\vec{u})$
- Calculer $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$

15 ABCD est un carré de côté a. On note I le milieu du côté [AD] et J le milieu du côté [DC].



- Montrer que $BI = BJ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$
- En déduire que $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4}a^2 \cos(\widehat{IBJ})$
- En décomposant les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BJ}$, montrer que $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BJ} = a^2$.
- En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{IBJ}$, au degré près.

16 Le triangle DEF est tel que $DE = 6$, $DF = 3$ et $\widehat{EDF} = \frac{\pi}{4}$. Calculer EF.

17 Le triangle ABC est tel que $AB = 10$, $AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 20$. Calculer une valeur arrondie au dixième de BC.

18 Dans le triangle MNP, on sait que $MN = \sqrt{5}$, $MP = 2\sqrt{3}$ et $\widehat{NMP} = \frac{2\pi}{3}$. Calculer NP.

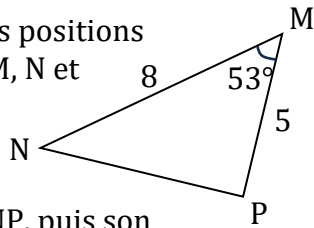
19 Soit EFG un triangle isocèle en F tel que $FG = 4$ et $\widehat{EFG} = \frac{5\pi}{6}$. Calculer EG.

20 Soit un triangle DEF tel que $DE = 9$, $DF = 4$ et $\widehat{EDF} = 65^\circ$.

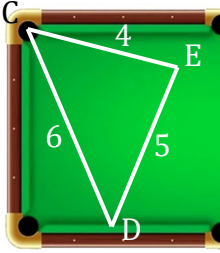
- Donner une valeur approchée de EF à 0,1 près.
- En déduire une valeur approchée des angles $\widehat{DEF}$ et $\widehat{DFE}$, au dixième de degré près.

21 Dans un triangle équilatéral ABC de côté a, soit le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. Calculer AD en fonction de a

22 Sur un green de golf, trois positions de la balle sont repérées en M, N et P sur le schéma ci-contre. Le triangle MNP est tel que $MN = 8$, $MP = 5$ et $\widehat{M} = 53^\circ$. Calculer la valeur exacte de NP, puis son arrondi à 0,1 près.

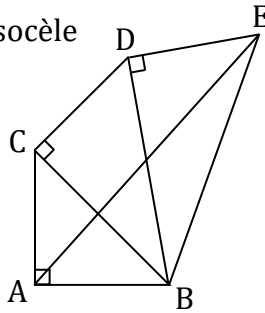


23 Pour éviter la boule noire, un joueur de billard souhaite faire rebondir sur un point D de la bande une boule blanche qui part de E, afin d'empocher la boule rouge située en C. Les côtés du triangle CED sont tels que $CE = 4$, $ED = 5$ et $CD = 6$. Calculer les trois angles du triangle, au degré près.

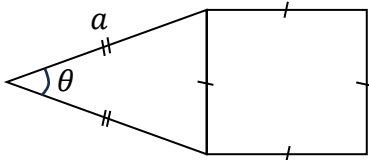


24 Soit un triangle rectangle isocèle ABC tel que $AB = AC = 10$. On construit les points D et E comme sur la figure ci-contre, avec $CD = DE = 10$.

1. Calculer BE en appliquant plusieurs fois le théorème de Pythagore.
2. Déterminer une mesure de $\widehat{ABE}$.
3. Calculer AE à 0,1 près.



25 La figure ci-dessous est constituée d'un carré et d'un triangle isocèle. On veut déterminer pour quelle valeur de θ le carré et le triangle isocèle ont le même périmètre. Calculer une valeur de θ à 0,1 degré près.



26 On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

27 ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$, $AC = 8$ et $AD = 5$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

28 Dans un triangle ABC on a $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

1. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$, puis $\widehat{BAC}$ au degré près.
2. Donner la valeur exacte de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

29 Le triangle IGN est tel que $IG = 2$, $IN = \sqrt{10}$ et $GN = \sqrt{2}$. Calculer la valeur exacte de l'angle $\widehat{G}$.

30 Choisir la ou les bonnes réponses.

1. ABC est un triangle tel que $AB = 2$, $AC = 3$ et $\widehat{A} = 60^\circ$. Alors BC est égal à :
 - a. $\sqrt{6}$
 - b. $\sqrt{7}$
 - c. $2\sqrt{2}$
2. Dans le même triangle, $\cos(\widehat{ABC})$ est égal à :
 - a. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$
 - b. $\frac{1}{\sqrt{7}}$
 - c. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$
3. Pour tout triangle ABC dont les côtés sont $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$, on a :
 - a. $\cos \widehat{C} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$
 - b. $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$
 - c. $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$

31 Soit ABCD un losange de centre O tel que $AC = 8$ et $BD = 6$.

1. Calculer la longueur du côté de ce losange.
2. a. Simplifier la somme vectorielle $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
b. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
3. Justifier l'égalité $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ puis calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD}$.

32 ABCD est un losange tel que $AB = 10$, $AC = 16$.

1. Calculer la longueur de la diagonale [BD].
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD}$.

33 On considère un triangle ABC tel que $AB = 7$, $BC = 4$ et $AC = 5$.

1. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. En déduire les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. Déterminer des valeurs approchées à 0,1 degrés près des angles du triangle ABC.

34 ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En remarquant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, calculer BC.
3. Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.
4. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ au degré près.

35 ABC est un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 7$ et $AC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

36 ABC est un triangle isocèle tel que $AB = BC = 6$ et $CA = 4$. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}$.

37 ABCD est un rectangle de centre O tel que $AB = 6$ et $AC = 10$.

1. Calculer $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$.

38 Un triangle ABC est tel que $AB = 4$, $BC = 5$ et $AC = 7$.

- a. En utilisant la formule d'Al-Kashi, montrer que $16 = 25 + 49 - 70 \cos \widehat{C}$.
- b. En déduire la valeur exacte de $\cos \widehat{C}$.
- c. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{C}$ à 0,1 degré près.