TRİGONOMÉTRİE 2

1 Soit a un nombre réel. On sait que $\cos a = 0{,}3$. Calculersin a à 0,01 près dans les cas suivants :
a. $0 < a < \pi$ b. $\pi < a < 2\pi$

2 On sait que $\sin a = 0{,}7$ et que a est un réel de l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
1. a. Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
   b. En utilisant le résultat précédent, déterminer une valeur approchée de $\cos a$.
2. Calculer la valeur exacte de $\cos a$.

3 Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = 0{,}6$ et que $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Déterminer une valeur approchée de x à 0,01 rad près.

4 Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = 0{,}8$ et que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

5 On considère la proposition suivante : « Si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $\sin x > 0$ »
1. Dire si cette proposition est vraie ou fausse. Justifier.
2. Écrire sa réciproque. Est-elle vraie ?

6 1. Tracer le cercle trigonométrique, puis marquer les points associés aux réels x tels que $\cos x = 0{,}25$.
2. Colorer en rouge l'ensemble des points du cercle trigonométrique associés aux réels x tels que $\cos x > 0{,}25$.

7 1. Tracer le cercle trigonométrique, puis marquer les points associés aux réels x tels que $\sin x = 0{,}3$.
2. Colorer en rouge l'ensemble des points du cercle trigonométrique associés aux réels x tels que $\sin x \leq 0{,}3$.

8 1. Rappeler les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
2. En remarquant que $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.
3. En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, calculer les valeurs de $\cos\frac{4\pi}{3}$ et $\sin\frac{4\pi}{3}$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.

9 1. Rappeler les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
3. En remarquant que $\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ en justifiant à l'aide d'une transformation géométrique.

10 1. Montrer que $\frac{33\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 8\pi$ et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{33\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{33\pi}{4}\right)$.
2. Montrer que $\frac{121\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 40\pi$ puis déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{121\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{121\pi}{3}\right)$.

11 Sans calculatrice, déterminer le cosinus et le sinus des réels suivants.
a. $\frac{43\pi}{3}$ b. $\frac{-57\pi}{4}$ c. $\frac{121\pi}{6}$
d. $\frac{-62\pi}{3}$ e. $\frac{173\pi}{6}$ f. $\frac{2\,019\pi}{6}$

12 Sans utiliser la calculatrice, déterminer :
a. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ b. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
c. $\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ d. $\cos^2\left(\frac{-\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

13 1. Calculer la valeur exacte des réels A et B.
$A = \cos 0 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$B = \sin 0 + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
2. Comparer A et B et expliquer le résultat en plaçant sur le cercle trigonométrique les points associés aux réels $0\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$.

14 1. Convertir $\frac{2\pi}{5}$ radians en degrés.
2. Dessiner le cercle trigonométrique puis placer les points images par enroulement des réels :
$$\frac{2\pi}{5}\ ;\ \frac{4\pi}{5}\ ;\ \frac{6\pi}{5}\ ;\ \frac{8\pi}{5}$$
3. Calculer alors sans calculatrice l'expression :
$A = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

15 1. Convertir $\frac{3\pi}{7}$ radians en degrés.
2. Dessiner le cercle trigonométrique puis placer les points images par enroulement des réels :
$$\frac{3\pi}{7}\ ;\ \frac{4\pi}{7}\ ;\ \frac{10\pi}{7}\ ;\ \frac{11\pi}{7}$$
3. Calculer alors sans calculatrice l'expression :
$B = \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{7}\right)$

16 Combien vaut la somme :
$\cos\left(\frac{\pi}{360}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{360}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{358\pi}{360}\right) + \cos\left(\frac{359\pi}{360}\right)$

17 1. Tracer le cercle trigonométrique et y placer les points d'abscisse $\frac{1}{2}$.
2. Déterminer les réels x de l'intervalle $[0\,;2\pi]$ tels que $\cos x = \frac{1}{2}$.

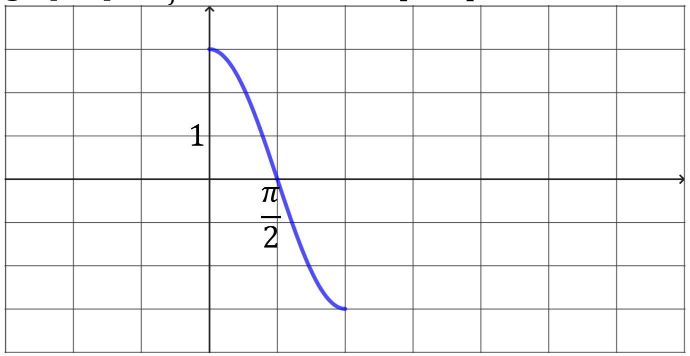
18 En procédant de la même manière que l'exercice précédent, déterminer les réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ tels que $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

19 En procédant de la même manière que l'exercice précédent, déterminer les réels x de l'intervalle e $[0\,;2\pi]$ tels que $\sin x = \frac{1}{2}$.

20 1. Tracer le cercle trigonométrique et y placer les points d'ordonnée $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Déterminer les réels x de l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$ tels que $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos x$. On a tracé ci-dessous sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



1. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[-\pi\,;0]$.
2. Calculer $f(x+2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathcal{C}_f$. Compléter $\mathcal{C}_f$ sur $[\pi\,;3\pi]$.

22 1. Tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur $[-\pi\,;\pi]$ puis déterminer les antécédents a et b de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[-\pi\,;\pi]$.

2. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Placer les deux points images des réels a et b par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser ?
3. Procéder de même pour la résolution de l'équation $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Que peut-on en déduire ?

23 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \sin x$$

1. Avec la calculatrice, représenter la fonction définie par $g(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(f(-x)\right)^2$. Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Démontrer ce résultat.

24 1. Donner un encadrement de $\cos x$ pour tout réel x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3 + 2\cos x}{5}$$

   a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
   b. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour x dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)
   c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel de $[0\,;\pi]$ tel que $f(x) = \frac{4}{5}$. Le déterminer.
4. a. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π. Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de f ?
   b. Étudier la parité de f. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. a. Montrer que la fonction f est paire.
   b. Que peut-on en déduire concernant sa représentation graphique ?
2. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π.
3. Expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f sur $[\pi\,;3\pi]$ et sur $[-3\pi\,;3\pi]$ à partir de la représentation graphique de f sur $[-\pi\,;\,\pi]$.
4. Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-3\pi\,;3\pi]$ à l'aide d'une calculatrice.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-3\pi\,;3\pi]$.
6. a. Montrer qu'il existe deux réels de l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin^2 x = 1$. Les donner.
   b. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ pour x appartenant à $[-\pi\,;\,\pi]$.
   c. En utilisant la question 3., en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-3\pi\,;3\pi]$.

26 Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{-\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ par $f(x) = 5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
2. Démontrer que la fonction f est périodique de période 2π.
3. Soit M le point de coordonnées $(x\,;f(x))$ pour x appartenant à $\left[\frac{-\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$. Quelle transformation géométrique permet de passer du point M de $\mathcal{C}_f$ au point M' d'abscisse $x+\pi$ de $\mathcal{C}_f$?
4. Dresser un tableau de valeurs de $f(x)$ avec un pas de $\frac{\pi}{6}$ pour $x \in \left[\frac{-\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\left[\frac{-\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ puis sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\frac{11\pi}{6}\right]$