

SUITES 2

1 Pour chacune des suites ci-dessous, préciser s'il s'agit d'une suite arithmétique et indiquer sa raison le cas échéant.

- a. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$
c. $u_n = -5n + 3$ d. $u_n = n^2 - 2n + 1$

2 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

- Déterminer u_1, u_2 et u_3 .
- Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $u_n = 5 + 3n$ puis déterminer u_7 .

3 Soit (v_n) la suite arithmétique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison -2 .

- Déterminer v_2, v_3 et v_4 .
- Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n non nul, $v_n = 4 - 2n$ puis déterminer v_8 .

4 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -7$ et la relation $v_{n+1} = v_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que (v_n) est arithmétique et donner sa raison.

5 Soit (w_n) une suite arithmétique telle que $w_3 = 5$ et $w_4 = 8$.

- Déterminer la raison de cette suite.
- Calculer w_2, w_1 et w_0 .

6 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

- Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le septième terme de cette suite.
- Étudier les variations de (u_n) .
- Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$.

7 Soit (w_n) une suite arithmétique de premier terme $w_1 = 5$ et de raison $r = -2$.

- Exprimer w_n en fonction de n puis calculer le dixième terme de cette suite.
- Étudier les variations de (u_n) .
- Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \dots + w_{13}$.

8 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 13$ et de raison $r = -5$.

- Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le quinzième terme de cette suite.
- Étudier les variations de (u_n) .
- Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{12}$.

9 Calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 99$.

10 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 , de raison r et $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- Si $u_0 = 2$ et $r = 3$ alors :
a. $u_4 = 7$ b. $u_4 = 12$ c. $u_4 = 14$
- Si $u_1 = -52$ et $u_2 = 2$ alors :
a. $r = 7$ b. $r = -3$ c. $r = -7$
- Si $u_4 = 2$ et $u_5 = 5$ alors :
a. $u_6 = 7$ b. $u_6 = 8$ c. $u_6 = 9$
- Si $u_0 = 3$ et $r = -1$ alors :
a. $S_5 = 5$ b. $S_5 = 3$ c. $S_5 = 0$

11 Déterminer 9 nombres impairs consécutifs sachant que leur somme est 153.

12 Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_0 = -2$ et $u_1 = 5$.

- Déterminer le treizième terme de la suite.
- Exprimer u_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
- À partir de quel rang les termes u_n sont-ils supérieurs à 1 000 ?
- Pour quelles valeurs de n le terme u_n est-il compris entre 500 et 1 000 ?

13 On veut creuser un puits. Le 1^{er} mètre coûte 100 €, le 2^{ème} mètre 120 €, le 3^{ème} mètre 140 € et ainsi de suite, en augmentant de 20 € à chaque mètre. On note un le prix du n -ième mètre creusé.

- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
- a. Calculer la somme $u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$.
b. En déduire le coût d'un puits de 30 mètres de profondeur.
- On dispose d'un budget de 33 000 €. Quelle profondeur maximale du puits peut-on creuser ?

14 Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 2$ et de raison 5.

- Déterminer w_1, w_2 et w_3 .
- Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $w_n = 2 \times 5^n$.

15 Soit (t_n) la suite géométrique de premier terme $t_1 = 6$ et de raison -3 .

- Déterminer t_2, t_3 et t_4 .
- Justifier que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = 6 \times (-3)^{n-1}$.

16 Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_1 = 5$ et de raison $q = 3$.

- Déterminer la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_8$.
- Déterminer la somme $S' = u_9 + u_{10} + \dots + u_{15}$.

17 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 3$.

- Exprimer v_n en fonction de n et calculer le dixième terme de cette suite.
- Étudier les variations de (v_n) .
- a. Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \dots + v_8$.
b. Calculer la somme $S' = v_1 + v_2 + \dots + v_9$.

18 Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $q = -2$.

- Exprimer v_n en fonction de n .
- Étudier les variations de (v_n) .
- Calculer la somme $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{10}$.

19 Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_1 = -\frac{1}{2}$ et de raison $q = 3$.

- Exprimer w_n en fonction de n .
- Étudier les variations de (w_n) .
- Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \dots + w_{12}$.

20 Soit (w_n) la suite géométrique de 1^{er} terme $w_1 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

- Exprimer w_n en fonction de n .
- Étudier les variations de (w_n) .
- Calculer la somme $S = w_1 + w_2 + \dots + w_{10}$.

21 Calculer $S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$

22 Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir 5 000 km à pied. Il peut parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue donc de 1 %. On notera d_n la distance parcourue durant le $n^{\text{ème}}$ jour.

1. a. Calculer les distances d_1, d_2 et d_3 .
b. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n .
c. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n .
2. Calculer, en fonction de n , le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
3. Justifier que $L_n < 5\,000$ pour tout n . Que dire du pari du globetrotter ?
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4 999 km.

23 Pour remercier Sissa de son invention du jeu d'échec, le roi lui demande de choisir sa récompense. Sissa demande alors qu'on lui offre un grain de riz pour la 1^{ère} case de l'échiquier, puis deux pour la 2^{ème} case, en doublant ainsi la quantité de grains jusqu'à la 64^{ème} case. Le roi s'amuse de cette modeste demande, mais un de ses conseillers le conjure de refuser d'y accéder. On appelle (u_n) la suite donnant le nombre de grains de riz sur la $n^{\text{ème}}$ case pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Donner u_1 .
b. Écrire u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .
c. Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
2. Exprimer u_n en fonction de n .
3. Calculer le nombre de grains de riz que Sissa aurait pu obtenir.
4. La production mondiale de riz est estimée à 787 millions de tonnes en 2021. Le poids moyen d'un grain de riz est de 0,04 g. Expliquer la remarque du conseiller.

24 Une entreprise de sécurité lance un nouveau système d'alarme. La première semaine 2 000 unités seront produites puis la production augmentera chaque semaine de 10 %. On désigne par u_n , le nombre de systèmes fabriqués la $n^{\text{ème}}$ semaine. On arrondira les résultats à l'unité.

1. Donner u_1 . Calculer u_2, u_3 et u_4 .
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n . Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Exprimer u_n en fonction de n .
4. Calculer la production totale au cours des 20 premières semaines.

25 Au niveau de la mer (altitude 0), la pression atmosphérique est de 1 013 hectopascals. On suppose que la pression atmosphérique diminue de 1,25 % à chaque élévation de 100 m. On note p_n la pression atmosphérique en hectopascals à l'altitude $100n$ mètres. On a donc $p_0 = 1\,013$. On arrondira tous les résultats à l'unité.

1. Calculer les pressions p_1 et p_2 aux altitudes 100 et 200 m.
2. Écrire p_{n+1} en fonction de p_n . Que peut-on en déduire sur la suite (p_n) ?
3. Exprimer p_n en fonction de n .
4. Calculer la pression atmosphérique 3 200 m d'altitude.
5. Calculer à partir de quelle altitude (à 100 m près) la pression atmosphérique devient inférieure à 600 hectopascals.

26 Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -4$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .
2. On pose $v_n = u_n + 3$.
a. Montrer que (v_n) est géométrique.
b. Donner l'expression explicite de v_n .
c. En déduire l'expression explicite de u_n .

27 Soit (v_n) la suite définie par $v_{n+1} = -4v_n + 10$ et $v_0 = 1$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 .
2. On pose $w_n = v_n - 2$.
a. Montrer que (w_n) est géométrique.
b. Donner l'expression explicite de w_n .
c. En déduire l'expression explicite de v_n .

28 Soit (x_n) la suite définie par $x_{n+1} = 3x_n + 8$ et $x_0 = 6$.

1. Calculer x_1, x_2 et x_3 .
2. On pose $y_n = x_n + 4$.
a. Montrer que (y_n) est géométrique.
b. Donner l'expression explicite de y_n .
c. En déduire l'expression explicite de x_n .

29 Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1$ et $u_0 = 0$.

1. a. Calculer $u_1, u_2, \dots, u_{100}$ à la calculatrice.
b. Conjecturer la limite de (u_n) .
c. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.
a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
b. Donner l'expression de v_n en fonction de n .
c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
3. a. À l'aide de la calculatrice, calculer des termes de la suite (v_n) pour de grandes valeurs de n .
b. Quelle conjecture peut-on faire concernant la limite de la suite (v_n) ? Cette deuxième conjecture semble-t-elle cohérente avec celle faite à la question 1. b. ?