

DÉRIVATION 3

- 1** a. Rappeler le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
b. Calculer $f'(x)$ puis préciser son signe.
c. Vérifier le résultat de la question 1.

2 Soit f la fonction définie sur $I = [1 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- a. Déterminer le sens de variation de f sans calculer sa dérivée.
b. Calculer $f'(x)$ puis justifier le sens de variation de f sur I .

3 Soit f la fonction définie sur $I = [1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

- a. Déterminer le sens de variation de f sans calculer sa dérivée.
b. Calculer $f'(x)$ puis justifier le sens de variation de f sur I .

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 1$$

- a. Calculer $f'(x)$.
b. Vérifier que les racines du polynôme du second degré $3x^2 - 18x + 15$ sont 1 et 5.
c. Etablir le tableau de variation de f .

5 La fonction f est définie sur $[0 ; 10]$ par :
$$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x - 24$$

- a. $f'(x)$ est un polynôme du second degré. Vérifier que ses racines sont 2 et 6.
b. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; 10]$ et dresser son tableau de variation.
c. Vérifier le résultat précédent à la calculatrice.

6 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^5 - 10x^3 - 40x + 9$

- a. Factoriser l'expression $x^4 - 3x^2 - 4$. (poser $X = \dots$)
b. Calculer $f'(x)$.
c. Dresser le tableau de variation de f .

7 Déterminer l'ensemble de définition puis le sens de variation des fonctions proposées.

- a. $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2$ 019
b. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 2$ 020
c. $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$
d. $f(x) = 3 - \frac{5}{x}$
e. $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$
f. $f(x) = \frac{4x-7}{2x-2}$
g. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
h. $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$
i. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+3}$
j. $f(x) = \frac{3x^2-1}{2x^2+x}$

8 Un médicament antalgique est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par une fonction f qui, au temps écoulé x en heures, associe la concentration $f(x)$ en milligrammes par litre de sang (mg/L).

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.

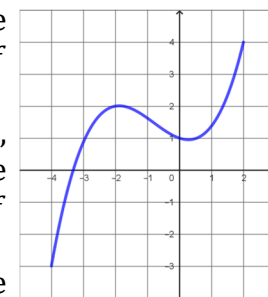
- a. Calculer $f'(x)$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 6]$.
c. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; 6]$ et construire son tableau de variation.
d. « Au bout de 3 heures, il y a davantage de produit actif dans le sang qu'au bout de 2 heures. » Vrai ou faux ? Justifier la réponse.

9 On étudie la croissance d'une population de bactéries sur une période de deux heures. L'évolution de la taille de cette population est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par $f(t) = -4,5t^3 + 13,5t^2 + 2$, dans laquelle t est exprimé en heures et $f(t)$ en millions de bactéries. La dérivée de la fonction f représente la vitesse de croissance de la population. On note $v(t)$ cette vitesse de croissance.

- a. Calculer $v(t)$ puis $v'(t)$.
b. Étudier les variations de la fonction v sur $[0 ; 2]$.
c. Décrire l'évolution de la population de bactéries.

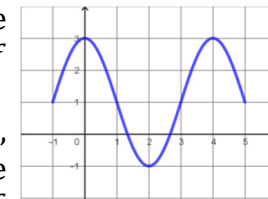
10 Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction f dérivable sur $[-4 ; 2]$.

- a. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[-4 ; 2]$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-4 ; 2]$.



11 Sur le graphique ci-contre est représentée une fonction f dérivable sur $[-1 ; 5]$.

- a. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[-1 ; 5]$.
b. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; 5]$.



12 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)$ est positif sur $[-4 ; 1]$ et négatif sur $[1 ; 5]$. De plus, $f(-4) = 1$, $f(1) = 6$ et $f(5) = 3$.

- a. Construire le tableau de variation de la fonction f
b. Déterminer les extremums de f sur $[-4 ; 5]$.

13 La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 7]$ par $f(x) = x^4 - 8x^2 + 10$.

- a. Montrer que pour tout réel x de $[-3 ; 7]$, on a $f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$.
b. Étudier les variations de f sur $[-3 ; 7]$.
c. Donner un encadrement de $f(x)$ sur $[0 ; 3]$ puis sur $[-3 ; 7]$.

14 On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 4]$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 5$.

- a. Calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe.
b. Déterminer les extremums (éventuellement locaux) de f sur $[-1 ; 4]$.
c. Que peut-on dire des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 3 ?

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 2}$$

- Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5 ; 1]$.
- Quel est le minimum de f sur $[-5 ; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?
- Quel est le maximum de f sur $[-5 ; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint ?

16 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x - 3$.

- Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Vérifier que $f(1) = 0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $x^3 > 3 - 2x$.

17 La fonction f est définie sur l'intervalle $I = [0 ; 10]$ par $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.

- Étudier les variations de f sur I .
- Montrer que, pour tout réel x de I , $f(x) > 0$.
- En déduire le sens de variation de la fonction g définie sur I par $g(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 57$
- Déterminer les extremums de g sur I .

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$$

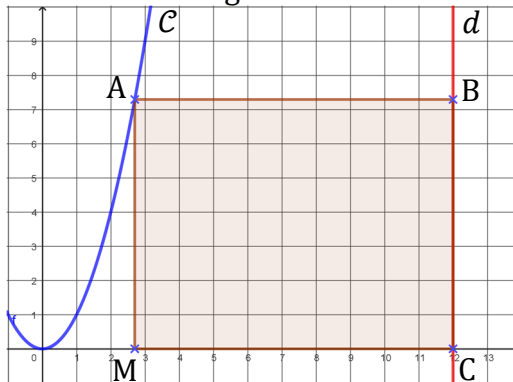
$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère et $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ en 1.

- Déterminer une équation de $\mathcal{T}$.
- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (4x - 4)$.
 - Étudier les variations de g .
 - Calculer $g(-3)$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
 - Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x .
- En déduire la position relative de $\mathcal{T}$ par rapport à $\mathcal{C}$.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$. (On vérifiera que l'on a $f(-2) = g(-2)$.)

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite d d'équation $x = 12$. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction carré. Pour tout point M de coordonnées $(x ; 0)$ avec x réel compris entre 0 et 12, on construit le rectangle ABCM comme sur la figure ci-dessous.



- Déterminer, en fonction de x , les coordonnées des points A, B et C.
- Montrer que l'aire du rectangle MABC est égale à $-x^3 + 12x^2$.
- On considère la fonction f définie sur $[0 ; 12]$ par $f(x) = -x^3 + 12x^2$.
 - Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.
 - Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 12]$.
- Déterminer la position du point M rendant l'aire du rectangle MABC maximale et préciser cette aire.

21 Une entreprise vend un tissu en coton de forme rectangulaire de 1 mètre de large. On note x sa longueur exprimée en kilomètres, x étant un réel compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de ce tissu est donné par $C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 350x + 1\,000$.

Le cours du marché offre un prix de 530 € le kilomètre de tissu fabriqué par l'entreprise. Pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 10]$, on note $R(x)$ la recette et $B(x)$ le bénéfice générés par la production et la vente de x kilomètres de tissu par l'entreprise.

- Déterminer le montant des coûts fixes.
 - Calculer le coût de production, la recette et le bénéfice générés par la production et la vente de 4 kilomètres de tissus.
 - Exprimer $R(x)$ en fonction de x .
- Montrer que, pour tout réel de $[0 ; 10]$:

$$B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 1\,000$$
 - Déterminer $B'(x)$.
 - Étudier le signe de $B'(x)$ et en déduire les variations de la fonction B sur $[0 ; 10]$.
- Pour quelle longueur de tissu produit et vendu l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice maximal ?
 - Donner alors la valeur de ce bénéfice maximal.

22 La consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule est modélisée par la fonction f définie sur $I = [30 ; 130]$ par $f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$ où x est exprimé en km.h^{-1} et $f(x)$ en litres pour 100 km.

- Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à 30 km.h^{-1} , quelle est sa consommation ? Et lorsqu'il roule à 50 km.h^{-1} ?
- Montrer que, pour $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \frac{800x - 60\,000}{x^3}$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30 ; 130]$.
 - Dresser le tableau de variation de f sur I .
- Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimale ? Combien vaut, à 0,01 près, cette consommation ?