SUITES 1

1 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3$.
Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_{15}.

2 Soit (z_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $z_0 = 5$ et la relation $z_{n+1} = 2z_n + 3$ pour tout entier naturel n.
a. Écrire la relation pour $n = 0$, en déduire $z_1 = 7$.
b. Écrire la relation pour $n = 1$ et en déduire la valeur de z_2.
c. Procéder de façon analogue pour calculer z_3.

3 On considère (u_n) la suite des multiples de 5.
Définir u_n pour tout entier naturel $n \geq 1$:
a. en fonction de n
b. par récurrence en fonction de u_{n-1}.

4 Soit (u_n) la suite ainsi définie : pour tout entier naturel n, le terme d'indice n est égal au carré de son rang auquel on soustrait 3.
Donner l'expression de u_n en fonction de n.

5 Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_0 = -4$ et « chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par 3 et en lui ajoutant -1 ».
1. Vérifier que $w_1 = -11$.
2. Calculer w_2.
3. Donner la relation entre w_{n+1} et w_n pour tout entier naturel n.

6 On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer plusieurs fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et à noter la liste des nombres obtenus.
1. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance deux fois le dé ?
2. Combien y a-t-il d'issues possibles si on lance trois fois le dé ?
3. On appelle v_n le nombre d'issues possibles pour n lancers successifs du dé.
   a. Donner les valeurs de v_1, v_2 et v_3.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.

7 On place 15 000 € sur un livret d'épargne rémunéré à 2 % d'intérêts composés. On suppose que l'on retire 400 € chaque début d'année à partir de la deuxième année.
1. Calculer le capital au bout d'un an après le retrait de 400 €.
2. On appelle v_n le capital présent au bout de la n-ième année après le retrait de 400 €. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

8 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 1$ et $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1 \end{cases}$
Pour chacune de ces suites :
a. Calculer les trois premiers termes.
b. Calculer le cinquième terme.

9 Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer le sens de variation en calculant la différence $u_{n+1} - u_n$.
1. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - n + 1$.
2. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
3. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$
4. (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$

10 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et par une relation de récurrence. Pour chacune des suites suivantes, calculer u_1, u_2, u_3.
1. $u_{n+1} = 3u_n - 2$ 2. $u_{n+1} = 1 - u_n^2$

11 Pour chacune des suites données, calculer les termes u_0, u_1, u_2 et u_{100}.
1. $u_n = n - \sqrt{n^2 + 9}$ 2. $u_n = \dfrac{n+5}{n^2+1}$
3. $u_n = (-1)^n + 1$

12 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{3}{2}n - 1$.
Déterminer le plus petit entier p tel que $v_p > 300$.

13 On considère la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = -n^2 + 2n + 13$. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $w_p < 10$.

14 On considère une table de valeurs des suites suivantes. Conjecturer leur limite.
a. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$

n	1	10	100	1 000	10 000
u_n	0	0,99	0,999 9	0,999 999	0,999 999 99

b. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^4$.

n	1	10	100	1 000
u_n	1	10 000	100 000 000	1 000 000 000 000

15 Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n^2 - 16n + 55$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la calculatrice, observer les termes v_n pour des grandes valeurs de n. et faire une conjecture concernant $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

16 Le 1er terme d'une suite étant saisi dans la variable A, l'algorithme ci-contre permet de calculer le terme de rang N de cette suite.

```
Pour i variant de 1 à n
    A ← 5 × A − 3
Fin Pour
```

1. On entre $A = 2$ et $N = 3$. Exécuter l'algorithme « pas à pas ». Quel terme de la suite a-t-on obtenu ? Combien vaut-il ?
2. Quelle valeur de N faut-il saisir pour obtenir le 7ème terme de la suite ?

17 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et l'algorithme ci-contre permettant de créer la liste des termes de la suite de u_0 à u_n. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

```
U ← 3
L ← [U]
Pour i variant de 1 à n
    U ← f(U)
    L ← L + [U]
Fin Pour
```

1. Déterminer ce que contient la variable L en fin d'algorithme pour $n = 4$.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.