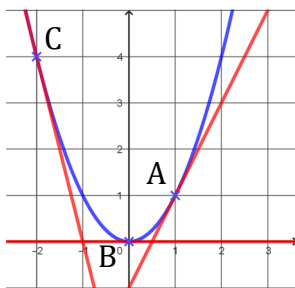


DÉRIVATION 2

1 On a tracé ci-contre la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et ses tangentes en trois points A, B et C.



- Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$, $f'(0)$ et $f'(-2)$.
- Donner l'expression de la fonction dérivée f' et vérifier les résultats de la question a.

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2; 2]$ par $f(x) = x^3$.

- Rappeler $f'(x)$ puis en déduire $f'(-1)$.
- Dans un repère, tracer la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f et sa tangente au point d'abscisse -1 .
- a. Existe-t-il une tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ parallèle à la droite d d'équation $y = 12x + 1$? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.
b. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à l'axe des abscisses ?

3 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

- Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ en son point A d'abscisse 2.
- Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{C}$, distinct de A, en lequel la tangente est parallèle à $\mathcal{T}$.
- Soit a un réel non nul. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses respectives $-a$ et a sont parallèles.

4 Soit i la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $i(x) = \frac{1}{x}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2.

5 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $]0; +\infty[$ dont l'expression est donnée ci-dessous.

- $f(x) = x^2 + 5$
- $g(x) = 7x^3$
- $h(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

6 Soit $x \in]0; +\infty[$. Déterminer le réel k tel que $f(x) = k \times \frac{1}{x}$, puis calculer $f'(x)$.

- $f(x) = \frac{4}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{3x}$
- $f(x) = -\frac{7}{9x}$

7 On propose de déterminer l'expression de g' de deux manières, où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x + 2)(-2x + 1)$.

- Développer $g(x)$ puis en déduire $g'(x)$.
- En utilisant la formule de la dérivée d'un produit, déterminer $g'(x)$ à partir de l'expression de g donnée dans l'énoncé.

8 Calculer la dérivée des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ et

$$g(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

9 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4x^2 - 2x + 1 & f_2(x) &= -x^3 - 7x^2 + x \\ f_3(x) &= 4 + 2x^2 - 3x^3 & f_4(x) &= \frac{-2}{3}x^3 + x^2 + 7x \\ f_5(x) &= -5 + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} & f_6(x) &= \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 - \frac{4}{x} \\ f_7(x) &= 3x^2\sqrt{x} & f_8(x) &= (3x - 4)^2 \end{aligned}$$

10 Soit f la fonction définie par $f(x) = (4x - 1)^2$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(x) = (u(x))^2$. Rappeler la formule qui donne $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ et $u'(x)$ puis en déduire $f'(x)$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

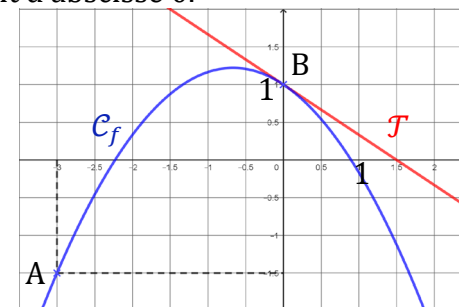
- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse -1 .

12 Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$ et $g(x) = -2x^2 + 2x - 3$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ leurs courbes représentatives respectives.

- Montrer que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 et la tangente Δ à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse 1 sont parallèles.
- Les tangentes $\mathcal{T}$ et Δ sont-elles confondues ?

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont trois réels. On a tracé sa courbe ci-dessous, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.



À partir de ces informations, déterminer l'expression de f .

14 Une entreprise fabrique de la peinture. Le coût de fabrication en euros de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur $[1; 100]$ par $C(x) = 0,001x^3 - 1,2x^2 + 600x + 500$.

- Quel est le coût de production exact de 50 tonnes de peinture ? de 51 tonnes ?
b. En déduire l'augmentation du coût entraîné par la fabrication de la 51^{ème} tonne de peinture.
- On appelle coût marginal au rang x la différence $C(x) - C(x - 1)$. On note $d(x)$ cette différence. Quel est le coût marginal au rang 50 ?
- On note C' la dérivée de la fonction C .
a. Calculer $C'(x)$, puis $C'(50)$.
b. Calculer $d(50)$ et comparer à $C'(50)$.
c. Que constate-t-on ?

15 Soit f la fonction définie sur $]2; 10]$ par $f(x) = \frac{1}{2x-4}$.

- On a $f(x) = \frac{1}{v(x)}$. Donner $v(x)$. Calculer $v'(x)$.
- Rappeler la formule qui donne $f'(x)$ en fonction de $v(x)$ et $v'(x)$, puis en déduire $f'(x)$.

16 Calculer la dérivée de la fonction définie sur l'intervalle I dont l'expression est donnée.

$$f(x) = \frac{1}{-5x+2} \text{ sur } I =]2,5; +\infty[$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2-3x+5} \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{-2}{7x+2} \text{ sur } I = [0; +\infty[$$

$$i(x) = \frac{3}{0,5x^2+1} \text{ sur } I = \mathbb{R}$$

$$j(x) = -4x + \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ sur } I =]0; +\infty[$$

$$k(x) = \frac{4x-3}{2x+1} \text{ sur } I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$l(x) = \frac{3-5x}{4x+1} \text{ sur } I =]-\frac{1}{4}; +\infty[$$

$$m(x) = \frac{7x-3}{-2x+4} \text{ sur } I =]-\infty; 2[$$

$$n(x) = \frac{2-x}{4-3x} \text{ sur } I =]-\infty; \frac{4}{3}[$$

$$o(x) = \frac{4x-3}{x^2+x} \text{ sur } I =]0; +\infty[$$

17 Dériver les fonctions suivantes :

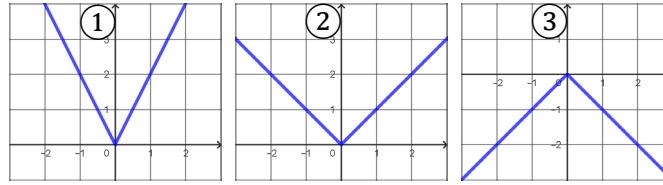
$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{x^5} & g(x) = \frac{1}{x^7} & h(x) = \frac{1}{x^8} \\ r(x) = \frac{2}{x^4} & s(x) = \frac{-3}{x^7} & t(x) = \frac{5}{x^{10}} \end{array}$$

18 Déterminer les dérivées de ces fonctions :

$$\begin{array}{ll} f(x) = (-3x+4)^3 & h(x) = (4x-3)^3 \\ g(x) = \sqrt{2x-10} & r(x) = \sqrt{-5x+2} \end{array}$$

pour $x > 5$ pour $x < 0,4$

19 Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2|x|, g(x) = -|x|$ et $h(x) = |-x|$. Associer à chaque fonction sa représentation graphique.



20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

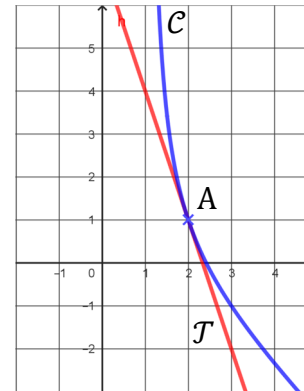
$$f(x) = -2 \times |x-2|$$

- Exprimer $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue puis représenter la fonction f .
- a. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 2$.
b. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

21 Soit g la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x-1}$$

La courbe $\mathcal{C}$ de la fonction g ainsi que sa tangente $\mathcal{T}$ au point A d'abscisse 2 sont tracées dans le repère ci-contre.



- Déterminer $g'(2)$ par lecture graphique.
- Calculer $g'(x)$ puis en déduire $g'(2)$. Vérifier la cohérence avec la réponse à la question 1.
- Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction g puis tracer sa tangente au point d'abscisse 3.
- a. Vérifier que pour tout réel x de I :

$$g(x) = -x + 1 + \frac{2}{x-1}$$

- Calculer $g'(x)$ en utilisant cette expression. Vérifier la cohérence des réponses apportées à la question 2.
- a. Montrer que $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = -3x + 7$.
b. Démontrer que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$ sur I .

22 Au début d'une partie, tous les joueurs sautent d'un bus volant et plongent en chute libre vers une île. Dans cet exercice, on fait l'hypothèse que les frottements de l'air sont négligeables. Ainsi, la distance parcourue par l'avatar durant la chute, en mètres, t secondes après le saut, est donnée par :

$$d(t) = \frac{1}{2}gt^2 \text{ où } g \approx 9,81\text{m.s}^{-2}$$

- Calculer la vitesse de l'avatar une seconde après le saut. On exprimera le résultat en m.s^{-1} puis en km.h^{-1} . On arrondira à l'unité.
- Pour que l'avatar ne s'écrase pas au sol, son planeur est ouvert automatiquement après 600 mètres de chute libre. Déterminer, à la seconde près, le temps passé en chute libre, c'est-à-dire le temps entre le saut et l'ouverture du planeur.
- L'accélération est la dérivée de la vitesse. Montrer que, durant la chute libre, l'accélération est constante au cours du temps et est égale à g .