

INTÉGRATION

1^{ère} partie

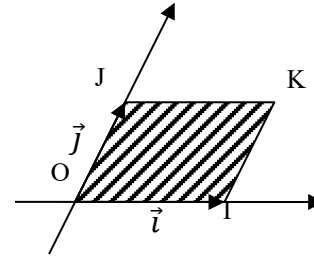
I Intégrale d'une fonction continue et positive

1° Définitions

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle « unité d'aire » l'aire du parallélogramme OIKJ.

On note alors $1 u. a. = \text{Aire}_{\text{OIKJ}}$.



⇒ Dans la suite de ce chapitre, les repères seront orthogonaux : OIKJ sera donc un rectangle (voire un carré si le repère est orthonormal)

Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure.

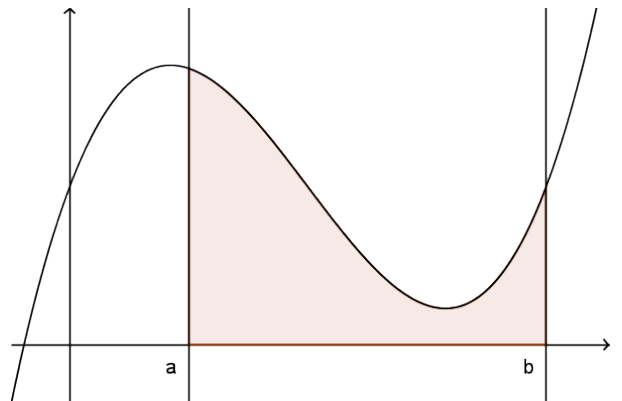
Ex : si l'énoncé stipule « On prendra pour unités 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées » alors on a

$$1 u. a. = 2 \text{ cm}^2$$

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ l'aire (exprimée en

$u. a.$) de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



On la note $\int_a^b f(x) dx$

Cela se lit « Intégrale de a à b de $f(x) dx$ ». Les valeurs a et b sont les bornes d'intégration.

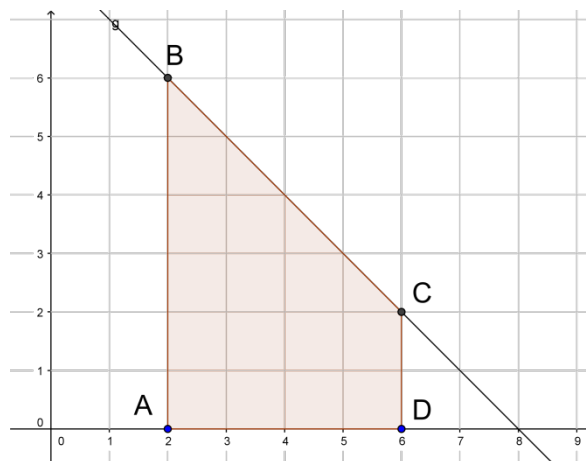
Remarque : la variable x est en fait muette : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable.

$$\text{Ainsi, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(t) dt$$

Ex : Prenons $g(x) = 8 - x$.

$$\begin{aligned} \int_2^6 g(x) dx &= \text{Aire}_{\text{ABCD}} \\ &= 16 u. a. \end{aligned}$$

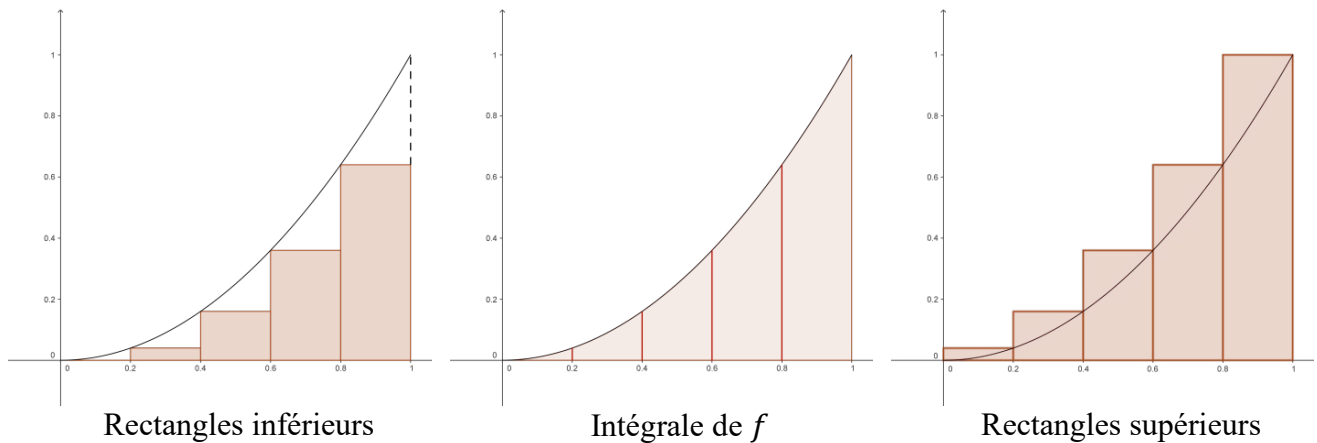
Pour info : hauteur $\times \frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2}$



2° Encadrement

Soit f une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

On partage l'intervalle $[a ; b]$ en sous-intervalles :

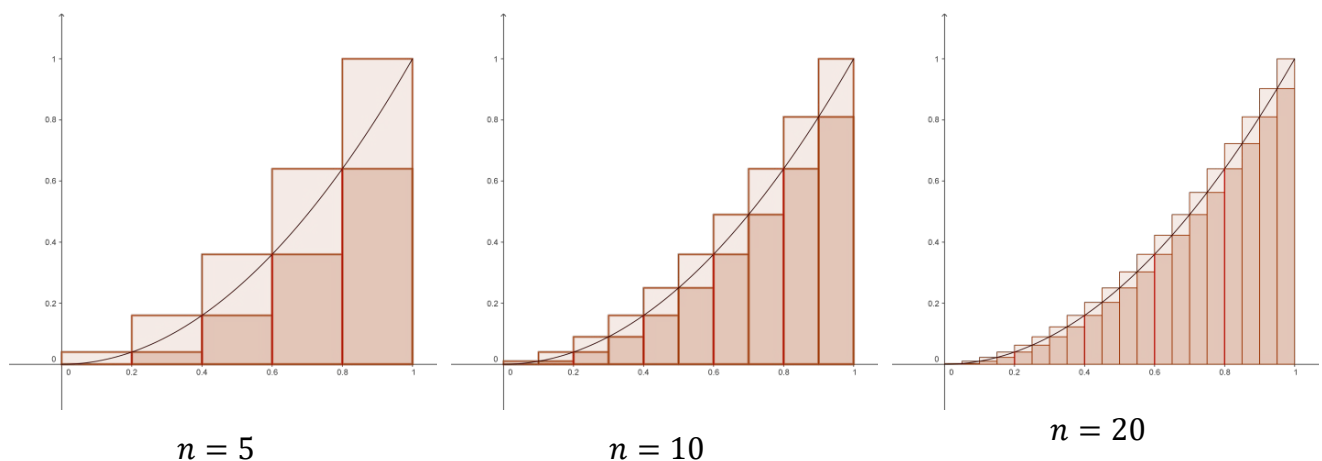


L'intégrale de f sur $[a ; b]$ est alors comprise entre les deux aires représentées à sa gauche et à sa droite, lesquelles se calculent comme sommes d'aires de rectangles.

Et plus l'amplitude des sous-intervalles sera petite, plus l'encadrement sera **précis**.

On choisit de partager l'intervalle $[a ; b]$ en n sous-intervalles d'amplitude $h = \frac{b-a}{n}$.

L'amplitude devient donc de plus en plus petite lorsque n devient grand.

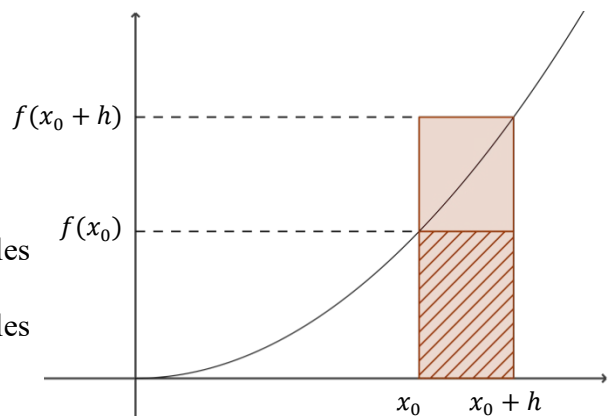


Ainsi, sur l'intervalle $[x ; x + h]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- le rectangle inférieur d'aire $h \times f(x_0)$
- le rectangle supérieur d'aire $h \times f(x_0 + h)$

Et il « suffit » alors de calculer :

- la somme de toutes les aires des rectangles inférieurs d'une part
- la somme de toutes les aires des rectangles supérieurs d'autre part



L'aire sous la courbe (c'est-à-dire l'intégrale de f) est alors comprise entre ces deux sommes.

Algorithme

Saisir a, b, n et f .

Affecter $\frac{b-a}{n}$ à h

Affecter a à x , 0 à u et 0 à v

Pour k allant de 1 à n faire

Affecter $u + h \times f(x)$ à u

Affecter $v + h \times f(x+h)$ à v

Affecter $x + h$ à x

Fin Pour

Afficher u et v

def integrale(a, b, n, f) :

$h = (b - a)/n$

$x = a$

$u = v = 0$

for k in range(n) :

$u = u + h \times f(x)$

$v = v + h \times f(x+h)$

$x = x + h$

return(u, v)

II Calculs d'intégrales

1° Lien avec les primitives

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Preuve : on l'effectuera dans le cas où f est strictement croissante sur $[a ; b]$

A
U
P
R
O
G
R
A
M
M
E

Soient $x_0 \in [a ; b]$ et h un réel strictement positif tel que $x_0 + h \in [a ; b]$. On a :

$$\begin{aligned} F(x_0 + h) - F(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \end{aligned}$$

$$\text{Aire}_{ABCD} \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq \text{Aire}_{ABEF}$$

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h) \quad \text{car } h > 0$$

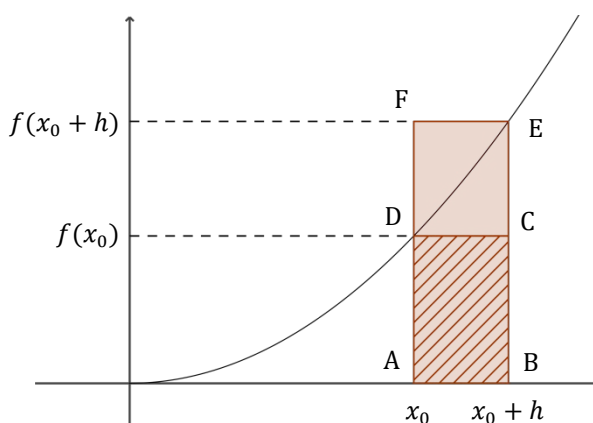
Or, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ car f est continue

D'après le théorème des gendarmes, on a alors $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Autrement dit, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$

Par ailleurs, $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$: F est donc bien la primitive de f qui s'annule en a .

(et si $h < 0$, il suffit d'inverser l'inégalité au moment où l'on divise par h .)



Propriété : Soit f une fonction continue et *positive* sur un intervalle $[a ; b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$$\begin{aligned}\text{On écrit } \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Preuve : une primitive de f sur $[a ; b]$ est la fonction G définie par $G(x) = \int_a^x f(t)dt$

Soit alors F une primitive quelconque de f .

A
U

P
R
O
G
R
A
M
M
E

On sait qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$.

Or, $G(a) = 0$ donc $F(a) + c = 0$

$$c = -F(a)$$

$$\begin{aligned}\text{Ainsi, } \int_a^b f(x)dx &= G(b) \\ &= F(b) + c \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Définition : Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

$$\begin{aligned}\text{On appelle intégrale de } f \text{ sur } [a ; b] \text{ la valeur } \int_a^b f(x)dx &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b) - F(a)\end{aligned}$$

Remarques : 1. Cette définition généralise la propriété précédente aux fonctions de signe quelconque. On pouvait déjà le faire en introduisant la notion d'aire *algébrique* : si f est négative, l'aire entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses est comptée négativement ! Mais sinon, une aire au sens classique (aire géométrique) est toujours positive hein...

$$2. \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

Ex : Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_2^5 (6x^2 - 5x + 1)dx$$

$$= \left[2x^3 - \frac{5x^2}{2} + x \right]_2^5$$

$$= \left(2 \times 5^3 - \frac{5 \times 5^2}{2} + 5 \right) - \left(2 \times 2^3 - \frac{5 \times 2^2}{2} + 2 \right)$$

$$= \frac{369}{2}$$

$$B = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x + 5} dx$$

$$= 2 \left[\ln(e^x + 5) \right]_0^1$$

$$= 2[\ln(e^1 + 5) - \ln(e^0 + 5)]$$

$$= 2[\ln(e + 5) - \ln 6]$$

$$= 2 \ln \frac{e + 5}{6}$$

Remarques : 1. Si $k \in \mathbb{R}$ alors $\int_a^b k dx = k(b - a)$
 En particulier, $\int_{-2}^3 e^{t^2} dx = e^{t^2}(3 - (-2)) = 5e^{t^2}$

2. Soient a, b et c trois réels.

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Et oui : on appelle aussi ça la **relation de Chasles**.

$\Rightarrow$ Cette relation peut être utilisée pour regrouper deux intégrales, mais aussi pour scinder en deux une intégrale (notamment dans le cas de fonctions définies avec des valeurs absolues)

3. Une intégrale peut être nulle sans que la fonction elle-même soit nulle.

En effet, il suffit que les aires positives soient compensées par des aires négatives...

Mais si $\int_a^b f(x) dx = 0$ et $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq 0$, alors $f = 0$ (avec $a \neq b$).

2° Linéarité de l'intégrale

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$, et $k \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow$ C'est une conséquence de la linéarité des primitives .

Ex : On pose $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$

1° Calculer $I + J$.

2° Déterminer $(\sin x \cos x)'$ puis calculer $I - J$.

3° En déduire alors I et J .

$$1^\circ I + J = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx + \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 x + \sin^2 x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dx$$

$$= 1(2\pi - 0) = 2\pi$$

$$2^\circ (\sin x \cos x)' = \cos x \sin x + (-\sin x) \cos x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}
I - J &= \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx - \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 x - \sin^2 x \, dx \\
&= \left[\sin x \cos x \right]_0^{2\pi} \\
&= \sin 2\pi \cos 2\pi - \sin 0 \cos 0 \\
&= 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

3° On a donc $\begin{cases} I + J = 2\pi \\ I - J = 0 \end{cases}$

D'où $I = J$ et donc $I + I = 2\pi$

$$2I = 2\pi$$

$$I = J = \pi$$

3° Inégalités et intégrales

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$.

Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

Ex : On souhaite encadrer $\int_0^1 e^{x^2} dx$ (pour rappel, on ne sait pas écrire explicitement la primitive de $e^{x^2} \dots$)

a. Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$

b. En déduire que $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

a. Sur $[0 ; 1]$, $0 \leq x^2 \leq x$. En effet, $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$.

Et donc $1 \leq e^{x^2} \leq e^x$ car la fonction exponentielle est croissante.

b. On intègre l'inégalité obtenue à la question précédente :

$$\int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx$$

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq [e^x]_0^1$$

$$1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$$

On pourrait montrer que $1 + x^2 \leq e^{x^2}$ et on arriverait alors à $\frac{4}{3} \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$