

PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I Généralités

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction. Elle se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées successives (dérivée, dérivée seconde...)

Généralement, ces équations traduisent des phénomènes physiques : décroissance radioactive, décharge d'un condensateur, évolution d'une population...

Considérons l'équation $f'(x) + 2f(x) = 6x - 1$. On l'écrira sous la forme $y' + 2y = 6x - 1$.

Vérifions que la fonction $g(x) = 3x - 2$ est solution de cette équation différentielle.

$$g'(x) + 2g(x) = 3 + 2(3x - 2)$$

$$= 3 + 6x - 4$$

$$= 6x - 1 \text{ donc } g \text{ est solution de } y' + 2y = 6x - 1.$$

II Primitives d'une fonction

1° Les bases

Définition : Une fonction F est une primitive de f sur I si $F' = f$

Autrement dit, « trouver une primitive » est l'opération inverse de « trouver une dérivée ».

Remarque : F est une primitive de f si F est solution de l'équation différentielle $y' = f$

Ex : $F(x) = 2 \ln x - 3x^2 + 4x - 3$ est-elle une primitive de $f(x) = \frac{2}{x} - 6x + 4$ sur $\mathbb{R}_+^*$?

$$F'(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 3 \times 2x + 4 = f(x)$$

F est donc bien une primitive de f .

Les primitives de certaines fonctions usuelles sont à connaître. (il s'agit du tableau inverse de celui des dérivées)

Fonction	Une primitive	Intervalle
$a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
e^x	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Ex : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} & f(x) = x^2 &\Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} & f(x) = x^3 &\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} \\ f(x) = \frac{1}{x^2} &\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x} & f(x) = \frac{1}{x^3} &\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2x^2} & f(x) = \frac{1}{x^4} &\Rightarrow F(x) = \frac{-1}{3x^3} \end{aligned}$$

Remarque : Pour la primitive de $\frac{1}{x^n}$, on peut en fait utiliser la même formule que pour x^n

$$\begin{aligned} \text{En effet, } f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} &\Rightarrow F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2} \end{aligned}$$

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues sur $[a ; b]$ de primitives F et G .

Une primitive de $f + g$ est $F + G$ et une primitive de kf est kF ($k \in \mathbb{R}$)

Preuve : $(F + G)' = F' + G' = f + g$ et $(kF)' = k \times F' = kf$

Ex : déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^2 - 6x + 3 - \frac{2}{x^2} \text{ sur } \mathbb{R}^* & g(x) &= \frac{5x^3 - 3x + 7}{x} \text{ sur } \mathbb{R}^* \\ &= 4x^2 - 6x + 3 - 2 \times \frac{1}{x^2} & &= \frac{5x^3}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{7}{x} = 5x^2 - 3 + 7 \times \frac{1}{x} \\ F(x) &= 4 \frac{x^3}{3} - 6 \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \times \frac{-1}{x} & G(x) &= 5 \frac{x^3}{3} - 3x + 7 \ln x \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + 3x + \frac{2}{x} & &= \frac{5}{3}x^3 - 3x + 7 \ln x \end{aligned}$$

2° Fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Primitive	Condition
$u' u^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	/
$\frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$
$u' e^u$	e^u	/



Il faut donc « faire apparaître » le u' pour pouvoir déterminer une primitive !

Ex : déterminer une primitive des fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition :

Rédaction

❶ $f_1(x) = 3(4x - 7)^5$

$$= 3 \times \frac{1}{4} \times 4(4x - 7)^5$$

$$\text{D'où } F_1(x) = \frac{3}{4} \times \frac{(4x - 7)^6}{6} = \frac{1}{8}(4x - 7)^6$$

❷ $f_2(x) = 2e^{3-5x}$

$$= \frac{2}{-5} \times (-5)e^{3-5x}$$

$$\text{D'où } F_2(x) = \frac{-2}{5} \times e^{3-5x}$$

❸ $f_3(x) = \frac{5}{3\sqrt{7x+1}}$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{2\sqrt{7x+1}}$$

$$\text{D'où } F_3(x) = \frac{10}{21} \times \sqrt{7x+1}$$

❹ $f_4(x) = \frac{3x}{x^2+2}$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+2}$$

$$\text{D'où } F_4(x) = \frac{3}{2} \times \ln(x^2+2) \quad \text{car } x^2+2 > 0$$

❺ $f_5(x) = \frac{-3}{(5x+2)^2}$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{-5}{(5x+2)^2}$$

$$\text{D'où } F_5(x) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5x+2} = \frac{3}{5(5x+2)}$$

Brouillon

f_1 est de la forme u^5 avec $u = 4x - 7$

$\Rightarrow$ il faut faire apparaître $u' = 4$

$$\text{c.a.d } f_1 = \frac{3}{4} u' u^5 \text{ donc } F_1 = \frac{3}{4} \times \frac{u^6}{6}$$

f_2 est de la forme e^u avec $u = 3 - 5x$

$\Rightarrow$ il faut faire apparaître $u' = -5$

$$\text{c.a.d } f_2 = \frac{-2}{5} u' e^u \text{ donc } F_2 = \frac{-2}{5} \times e^u$$

f_3 est de la forme $\frac{1}{\sqrt{u}}$ avec $u = 7x + 1$

$\Rightarrow$ il faut faire apparaître $u' = 7$

$$\text{c.a.d } f_3 = \frac{10}{21} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}} \text{ donc } F_3 = \frac{10}{21} \times \sqrt{u}$$

f_4 est de la forme $\frac{1}{u}$ avec $u = x^2 + 2$

$\Rightarrow$ il faut faire apparaître $u' = 2x$

$$\text{c.a.d } f_4 = \frac{3}{2} \times \frac{u'}{u} \text{ donc } F_4 = \frac{3}{2} \times \ln|u|$$

f_5 est de la forme $\frac{1}{u^2}$ avec $u = 5x + 2$

$\Rightarrow$ il faut faire apparaître $u' = 5$

$$\text{c.a.d } f_5 = \frac{3}{5} \times \frac{-u'}{u^2} \text{ donc } F_5 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{u}$$

3° Propriétés

A
U

P
R
O
G
R
A
M
M
E

Propriété : soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si F est une primitive de f alors toutes les primitives de f sont de la forme $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$

Preuve : Soient F et G deux primitives de f sur I .

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$$

Donc $G - F$ est constante sur I .

Autrement dit, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G - F = c$, et donc $G = F + c$.

Propriété : soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si f admet des primitives sur I , alors pour x_0 et y_0 quelconques, il existe une unique primitive G de f

telle que $G(x_0) = y_0$

On dit que cette primitive vérifie une « condition initiale ».

Preuve : Soient x_0 et y_0 deux réels quelconques.

$\Rightarrow$ Existence : soit F une primitive de f .

Nécessairement, les autres primitives de f sont de la forme $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$

On a alors $G(x_0) = F(x_0) + c$.

Mais si on veut que $G(x_0) = y_0$, il faut obligatoirement choisir $c = y_0 - F(x_0)$

Ainsi, la fonction $G = F + (y_0 - F(x_0))$ est une primitive de f et $G(x_0) = y_0$.

$\Rightarrow$ Unicité : Soient F et G deux primitives de f telles que $F(x_0) = y_0$ et $G(x_0) = y_0$.

On a nécessairement $G = F + c$ car F et G sont des primitives de f .

Et notamment, $G(x_0) = F(x_0) + c$ c'est-à-dire $y_0 = y_0 + c$.

D'où $c = 0$ et donc $F = G$.

Ex : Déterminer **la** primitive F de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ telle que $F(1) = -2$.

Une primitive de f est $x^3 + x^2 - x$

Donc $F(x) = x^3 + x^2 - x + c$ où $c \in \mathbb{R}$

Or, $F(1) = -2$ donc $1 + 1 - 1 + c = -2$

$$c = -2 - 1 = -3$$

Ainsi, **la** primitive F de f telle que $F(1) = -2$ est $F(x) = x^3 + x^2 - x - 3$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Remarque : bien que l'existence soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.

Ainsi, la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite !

III Equations différentielles

1° Equations $y' = ay$

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions de la forme

Ce^{ax} où $C \in \mathbb{R}$.

Preuve : Elle s'effectue en deux étapes.

$\Rightarrow$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = Ce^{ax} \times a$$

$$= a \times Ce^{ax} = af(x).$$

f est donc bien une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

$\Rightarrow$ Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

On introduit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{-ax}$

$$g'(x) = f'(x)e^{-ax} + f(x)e^{-ax} \times (-a)$$

$$= af(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} \quad \text{car } f'(x) = af(x)$$

$$= 0$$

g est donc constante, c'est-à-dire $g(x) = C$ où $C \in \mathbb{R}$.

$$e^{-ax} \times f(x) = C$$

$$f(x) = \frac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$$

Ex : 1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $3y' - 2y = 0$

2. Déterminer la solution de (E) telle que $y(3) = 5$.

$$1. 3y' - 2y = 0$$

$$3y' = 2y$$

$$y' = \frac{2}{3}y$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $f(x) = Ce^{\frac{2}{3}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2. On doit avoir $f(3) = 5$

$$Ce^{\frac{2}{3} \times 3} = 5$$

$$Ce^2 = 5$$

$$C = \frac{5}{e^2} = 5e^{-2}$$

La solution cherchée est donc $f(x) = 5e^{-2}e^{\frac{2}{3}x} = 5e^{\frac{2}{3}x-2}$

2° Equations $y' = ay + b$

Propriété : Soient a et b deux réels, $a \neq 0$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont

les fonctions de la forme $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

⇒ On retrouve ce type d'équation différentielle en physique par exemple : la vitesse v d'un corps de masse m qu'on lâche en chute libre dans l'air conduit à l'équation différentielle :

$$v' + \frac{k}{m}v = g$$

où k est un coefficient correspondant à la force de frottement et g la constante gravitationnelle.

Ex : 1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $4y' + 3y = 5$

2. Déterminer la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

1. $4y' + 3y = 5$ équivaut à $4y' = -3y + 5$

$$y' = \frac{-3}{4}y + \frac{5}{4}$$

$$\text{D'où } \frac{b}{a} = \frac{5}{4} : \frac{-3}{4}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{4}{-3} = \frac{-5}{3}$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $f(x) = Ce^{\frac{-3}{4}x} + \frac{5}{3}$ où $C \in \mathbb{R}$

2. Or, $y(0) = 1$ donc $f(0) = Ce^{\frac{-3}{4} \times 0} + \frac{5}{3} = 1$

$$C + \frac{5}{3} = 1$$

$$C = 1 - \frac{5}{3} = \frac{-2}{3}$$

La solution recherchée est donc $f(x) = \frac{-2}{3}e^{\frac{-3}{4}x} + \frac{5}{3}$

Remarque : $f(x) = -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de $y' = ay + b$

En effet, $f'(x) = 0$ et $af(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$

3° Equations $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I .

On note (E) l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction.

Soit u une solution de (E).

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = ce^{ax} + u(x)$.

Autrement dit, ce sont les solutions de l'équation $y' = ay$ auxquelles on ajoute une solution de (E).

Preuve : soit g une solution quelconque de l'équation $y' = ay + f$, et soit u une solution particulière de cette même équation.

$$\begin{aligned}(g - u)' &= g' - u' \\ &= ag + f - (au + f) \\ &= ag + f - au - f \\ &= a(g - u)\end{aligned}$$

Autrement dit, $g - u$ est solution de l'équation $y' = ay$.

Donc $g - u = ce^{ax}$.

D'où $g = ce^{ax} + u$

Ex : On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2x^2 - 6$

1. Vérifier que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - x + 2,5$ est une solution de (E) .
2. En déduire les solutions de (E) .

$$\begin{aligned}1. f'(x) - 2f(x) &= -2x - 1 - 2(-x^2 - x + 2,5) \\ &= -2x - 1 + 2x^2 + 2x - 5 \\ &= 2x^2 - 6\end{aligned}$$

Donc f est bien une solution de (E) .

$$2. y' - 2y = 2x^2 - 6 \text{ équivaut à } y' = 2y + 2x^2 - 6$$

Les solutions de (E) sont donc les fonctions $f(x) = Ce^{2x} - x^2 - x + 2,5$ où $C \in \mathbb{R}$.

Remarque : soit $t \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-t^2}$.

Une primitive de f est $F(x) = e^{-t^2}x$.

En effet, e^{-t^2} est une constante puisque la variable de la fonction est x .