

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Créée par le mathématicien John Néper en 1614, le logarithme (logos + arithmos : logique + nombre) avait pour objet de simplifier les calculs en substituant les multiplications par des additions, ce qui était pour l'époque extrêmement utile en astronomie, navigation... Des tables logarithmiques donnant les valeurs précises de nombreuses valeurs des logarithmes permettaient alors de ce faire. La fonction logarithme a par la suite été rigoureusement définie par Euler vers 1730.

I Définition

On sait que la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, l'équation $e^x = a$ admet donc une unique solution pour tout $a > 0$.

Définition : Soit $a \in]0 ; +\infty[$. On appelle logarithme népérien de a et on note $\ln(a)$ l'unique solution de l'équation $e^x = a$.

La fonction logarithme népérien est alors la fonction notée « ln » qui, à tout $x \in]0 ; +\infty[$, associe le nombre $\ln(x)$.

Conséquences : 1. $y = \ln x$ avec $x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

$$2. \ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; \ln \frac{1}{e} = -1$$

$$3. \ln e^x = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } e^{\ln x} = x \text{ pour tout } x > 0.$$

On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des fonctions réciproques.



Un logarithme népérien n'existe donc que si son contenu est strictement positif !

Ex : Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 - 3x)$.

Il faut que $1 - 3x > 0$

$$1 > 3x$$

$$\frac{1}{3} > x \text{ et donc } \mathcal{D}_f = \left] -\infty ; \frac{1}{3} \right[$$

II Propriétés algébriques

Propriété : Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Preuve : $e^{\ln(a \times b)} = a \times b$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$

On a donc $e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$ et ainsi $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

Conséquences : 1. $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

2. $\ln a^n = n \ln a$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

3. $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Preuves :

1. $\ln \frac{1}{a} + \ln a = \ln \left(\frac{1}{a} \times a \right)$ $= \ln 1 = 0$ D'où $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$	$\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \times \frac{1}{b} \right)$ $= \ln a + \ln \frac{1}{b}$ $= \ln a - \ln b$ CQFD
--	--

2. Par récurrence pour $pn \in \mathbb{N}$, puis utiliser la propriété 1.

3. On a $2 \ln \sqrt{a} = \ln \sqrt{a}^2 = \ln a$ d'où $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Ex : Simplifier les écritures des nombres suivants :

A = $\ln 3 + \ln \frac{1}{9}$

= $\ln 3 - \ln 9$

= $\ln 3 - \ln 3^2$

= $\ln 3 - 2 \ln 3 = -\ln 3$

B = $3 \ln \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln 8$

= $3 \times \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2^3$

= $\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \times 3 \ln 2 = 0$

Ex : Calculer les nombres suivants :

C = $\ln \left(e \sqrt{e^3} \right)$

= $\ln(e) + \ln(\sqrt{e^3})$

= $1 + \frac{1}{2} \ln(e^3)$

= $1 + \frac{1}{2} \times 3 \ln(e)$

= $1 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2}$

D = $\ln \left(\frac{\sqrt{e}}{e^{-2}} \right)$

= $\ln(\sqrt{e}) - \ln(e^{-2})$

= $\frac{1}{2} \ln(e) - (-2) \ln(e)$

= $\frac{1}{2} + 2$

= $\frac{5}{2}$

III Etude de la fonction

A On admettra que la fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ (voir fin de chapitre)

U

P Propriété : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

R

O

G Preuve : $(e^{\ln x})' = x' = 1$

R

A

M

M

E

Et $(e^{\ln x})' = (\ln x)' e^{\ln x} = (\ln x)' x$ } d'où $1 = (\ln x)' x$ et ainsi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Propriété : la fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

Conséquences : si $a < b$ alors **$\ln a < \ln b$** (la réciproque est vraie car la fonction e^x est croissante !)

Et en particulier, $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

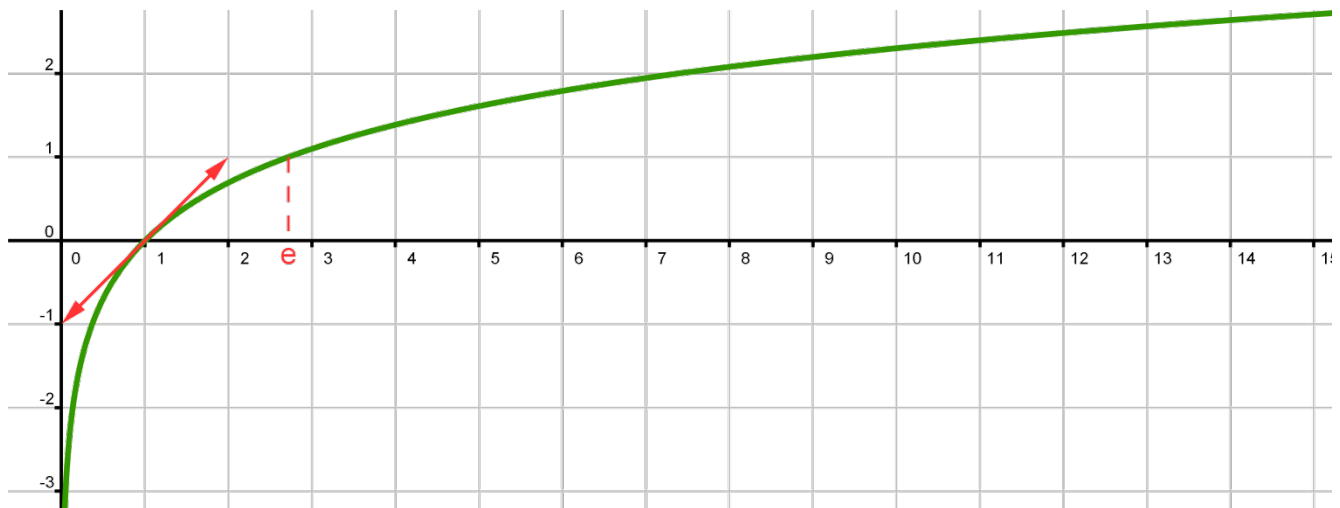
Preuve : Soit A un nombre positif quelconque.

$\ln x > A \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^A$ c'est-à-dire $x > e^A$

Autrement dit, dès que $x > e^A$ on a $\ln x > A$, d'où la première limite.

$$\begin{aligned} \text{Puis } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(-\ln \frac{1}{x} \right) \\ &= \lim_{X \rightarrow +\infty} (-\ln X) \text{ en posant } X = \frac{1}{x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

D'où la représentation graphique ci-dessous :



Remarque : Dans le domaine scientifique, on utilise généralement la fonction logarithme décimal, notée

« log » et définie par $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Elle permet de simplifier les calculs faisant intervenir des puis-

sances de 10 car $\log 10^n = \frac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$

On peut par exemple citer le pH d'une solution, donné par la formule $\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+]$.

On a également le décibel, défini comme dix fois le logarithme décimal du rapport entre deux puissances. Concrètement, entre un ampli de 50W et un ampli de 100W, on a alors une différence de « seulement »

3 dB car $10 \log \frac{100}{50} = 10 \log 2 \approx 3$

$\Rightarrow$ Un écart de 3 dB correspond donc à une puissance sonore deux fois plus importante.

IV Equations & inéquations

1° Avec des exponentielles

La fonction logarithme népérien permet « d'éliminer » une exponentielle préalablement isolée.

Ex 1 : Résoudre $5e^{2x-3} = 3$

$$e^{2x-3} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \ln(e^{2x-3}) = \ln \frac{3}{5}$$

$$2x - 3 = \ln \frac{3}{5}$$

$$2x = \ln \frac{3}{5} + 3$$

$$x = \frac{\ln \frac{3}{5} + 3}{2}$$

Remarque : $5e^{2x-3} > 3$ donnerait $x > 1,8$ c'est-à-dire $x \in]1,8 ; +\infty[$

Ex 2 : Résoudre $2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$

On pose $X = e^x$ ce qui donne $X^2 = e^{2x}$

L'équation devient alors $2X^2 - 3X - 2 = 0$

$$\Delta = 9 - (-16)$$

$$= 9 + 16$$

$$= 25$$

$$X_1 = \frac{3-5}{4}$$

$$= \frac{-2}{4}$$

$$= \frac{-1}{2}$$

$$X_2 = \frac{3+5}{4}$$

$$= \frac{8}{4}$$

$$= 2$$

Cela donne $e^x = \frac{-1}{2}$ et $e^x = 2$.

Or, une exponentielle est toujours positive donc la seule possibilité est $e^x = 2$.

D'où $x = \ln 2$.

Remarque : $2e^{2x} - 3e^x - 2 \leq 0$ donnerait $2X^2 - 3X - 2 \leq 0$

On aurait alors $X \in [-0,5 ; 2]$ c'est-à-dire $-0,5 \leq X \leq 2$

Si l'on revient à x , cela donne alors $-0,5 \leq e^x \leq 2$

Or, $e^x > 0$ donc cela revient à $0 < e^x \leq 2$ voire même $e^x \leq 2$

$$x \leq \ln 2$$

$$x \in]-\infty ; \ln 2]$$

2° Avec des logarithmes

La fonction exponentielle permet « d'éliminer » un logarithme népérien préalablement isolé.



Avec les logarithmes, il faut penser à **vérifier les ensembles de définition** !

Ex 1 : Résoudre l'inéquation $\ln(3x - 2) \leq 6$

Il faut que $3x - 2 > 0$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3} \quad \text{c'est à dire } x \in \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[$$

$$\ln(3x - 2) \leq 6 \Leftrightarrow 3x - 2 \leq e^6$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq e^6 + 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{e^6 + 2}{3}$$

$$\text{Autrement dit, } x \in \left] -\infty ; \frac{e^6 + 2}{3} \right]$$

$$\text{Or } x \in \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[\text{ donc } S = \left] \frac{2}{3} ; \frac{e^6 + 2}{3} \right]$$

Ex 2 : Résoudre l'équation $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6$

Il faut que $x - 1 > 0$ et $x - 2 > 0$

$$x > 1 \quad \text{et} \quad x > 2$$

Donc $x \in]2 ; +\infty[$

$$\text{A partir de là, } \ln(x - 1) + \ln(x - 2) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln((x - 1)(x - 2)) = \ln 6$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - x + 2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{lll} \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) & x_1 = \frac{3 - 5}{2} & x_2 = \frac{3 + 5}{2} \\ = 9 + 16 & = \frac{-2}{2} = -1 & = \frac{8}{2} = 4 \\ = 25 & & \end{array}$$

Or, $-1 \notin]2 ; +\infty[$ donc la seule solution est $x = 4$.

Remarque : $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) \leq \ln 6$ donnerait $x \in]2 ; 4]$



$$\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6 \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-2)) = \ln 6$$

En effet, la seconde équation admet $x = -1$ comme solution puisque :

$$\ln((-1-1)(-1-2)) = \ln((-2) \times (-3)) = \ln 6$$

Mais pour la première, $\ln(-1-1) + \ln(-1-2) = \ln(-2) + \ln(-3)$ 🤖

$\Rightarrow$ Il est fondamental de déterminer l'ensemble de définition **dès le départ !**



$$\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6 \Leftrightarrow x-1 + x-2 = 6$$

$\Rightarrow$ L'exponentielle ne s'utilise pas **terme à terme !**

$$\begin{aligned} \text{En revanche : } \ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6 &\Leftrightarrow e^{\ln(x-1)+\ln(x-2)} = e^{\ln 6} \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(x-1)} e^{\ln(x-2)} = 6 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 6 \end{aligned}$$

3° Avec des exposants

La fonction logarithme népérien permet de linéariser les exposants via $\ln a^n = n \ln a$

Ex 1 : Chaque mois, le prix du paquet de cigarette augmente de 1,5%. Dans combien de temps le prix du paquet aura-t-il doublé ?

Soit n le nombre de mois cherché. Chaque mois, on multiplie par $1 + \frac{1,5}{100} = 1,015$.

Ce problème revient donc à résoudre $1,015^n \geq 2$

$$\ln 1,015^n \geq \ln 2$$

$$n \ln 1,015 \geq \ln 2$$

$$n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,015}$$

$$n \geq 47$$

Il faudra donc **47** mois pour que le prix du paquet double, soit **3 ans et 11 mois**.

$\Rightarrow$ **Ces équations devront désormais être résolues algébriquement et non avec la table de valeurs**

Ex 2 : Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois « Pile » dépasse 99% ?

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de « Pile » obtenus. On

peut dire que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,5)$

On doit donc résoudre $p(X \geq 1) \geq 0,99$

$$1 - p(X = 0) \geq 0,99$$

$$1 - \binom{n}{0} \times 0,5^0 \times 0,5^{n-0} \geq 0,99$$

$$1 - 0,5^n \geq 0,99$$

$$0,01 \geq 0,5^n$$

$$\ln 0,01 \geq \ln 0,5^n$$



$$\ln 0,01 \geq n \ln 0,5$$

$$\frac{\ln 0,01}{\ln 0,5} \leq n \quad \text{car } \ln 0,5 < 0$$

$$6,4 \leq n$$

C'est donc à partir de 7 lancers que la probabilité d'obtenir au moins une fois pile dépasse 99%.

Ex 3 : Le gouvernement souhaite une augmentation du prix du tabac de 15% en 5 ans. De quel même pourcentage faut-il augmenter les prix chaque année pour atteindre cet objectif (au centième près) ?

Notons x le coefficient correspondant à l'augmentation pratiquée.

Ce problème revient donc à résoudre $x^5 = 1,15$

$$\ln x^5 = \ln 1,15$$

$$5 \ln x = \ln 1,15$$

$$\ln x = \frac{\ln 1,15}{5}$$

$$x = e^{\frac{\ln 1,15}{5}} \approx 1,0283$$

Il faut donc une augmentation de 2,83 % chaque année pendant 5 ans pour atteindre les 15 %.

Remarque : si on annonçait 5 augmentations de 3 %, la majorité des gens n'y verrait que du feu, pensant que cela ferait 15 % d'augmentation. Mais cela ferait en fait 15,93 % car $1,03^5 \approx 1,1593$

V Compléments

1° Croissances comparées

Propriété : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$

A Preuve : On pose $X = \ln x$. On a alors $x = e^X$

U Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on peut dire que $X = \ln x \rightarrow +\infty$

P D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ par croissances comparées.

R Et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X \times X = 0$ par croissances comparées.

O

G

R

A

M

M

E

Ces propriétés peuvent bien évidemment se généraliser pour tout entier naturel $n > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

Ex : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = 7 \ln x - 2x$

$$\text{On a } f(x) = x \left(7 \frac{\ln x}{x} - 2 \right)$$

$$\text{Or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 \frac{\ln x}{x} - 2 = -2 \text{ par croissances comparées.}$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ par produit.}$$

2° Fonctions $\ln(u(x))$

Propriété : Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

$$\text{La fonction } \ln(u(x)) \text{ est alors dérivable sur } I \text{ et } (\ln U)' = \frac{U'}{U}$$

Ex : Dériver les fonctions suivantes sur leurs ensembles de définition :

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) \text{ donne } f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$g(x) = \ln(5x - 2) \text{ donne } g'(x) = \frac{5}{5x - 2}$$

$$h(x) = \ln(e^{2x} + 3) \text{ donne } h'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 3}$$

Notation : $1,2^3$ est une puissance : cela signifie $1,2 \times 1,2 \times 1,2$.

En revanche, écrire $3^{1,2}$ n'a aucun sens ; et ce n'est surtout pas une puissance.

Mais si on essayait tout de même de donner un sens à $3^{1,2}$?

On aurait alors $\ln(3^{1,2}) = 1,2 \ln 3$ en élargissant les formules du logarithme népérien.

$$\text{Et ainsi, } e^{\ln(3^{1,2})} = e^{1,2 \ln 3}$$

$$3^{1,2} = e^{1,2 \ln 3}$$

On décide donc de définir a^b par $a^b = e^{b \ln a}$ pour tout $a > 0$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$.



$f(x) = x^2$ est une fonction **puissance** alors que $g(x) = 2^x$ est une fonction **exponentielle** !

$$\text{Ainsi, } (2^x)' = (e^{x \ln 2})'$$

$$= e^{x \ln 2} \times \ln 2$$

$$= 2^x \times \ln 2$$

HORS PROGRAMME

Propriété : la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Preuve : Soit a un nombre strictement positif, et soit $x > 0$.

Pour $x \neq a$, on a $\frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{X - A}{e^X - e^A}$ en posant $X = \ln x$ et $A = \ln a$

Si $x \rightarrow a$ alors $\ln x \rightarrow \ln a$ c'est-à-dire $X \rightarrow A$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A}$

Or, $\lim_{X \rightarrow A} \frac{e^X - e^A}{X - A}$ est le nombre dérivé de e^X en A

Donc $\lim_{X \rightarrow A} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^A = a$ et donc $\lim_{X \rightarrow A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$

Au final, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \frac{1}{a}$ CQFD

Propriété : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuve : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$

On reconnaît la formule du nombre dérivé de la fonction $\ln(x)$ en 1.

Or, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

D'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1} = 1$

Ex : Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$

Posons $x = \frac{1}{X}$: si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0$, $X > 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$