

REPRÉSENTATION DES DROITES ET DES PLANS

I Représentation paramétrique d'une droite

1° Définition

Propriété : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

On considère la droite (d) passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$M(x, y, z) \in (d) \Leftrightarrow \text{Il existe } t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de (d) (et t est le paramètre)

Preuve : $M(x, y, z) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = t \times a \\ y - y_A = t \times b \\ z - z_A = t \times c \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} x = x_A + a \times t \\ y = y_A + b \times t \\ z = z_A + c \times t \end{cases}$$

Remarques : 1) Il existe **une infinité** de représentations paramétriques d'une droite donnée.

2) On peut de même définir la représentation paramétrique d'un plan $\mathcal{P}$ passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de base $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

$$\text{Cela donne } \mathcal{P} \begin{cases} x = x_A + t \times a + t' \times a' \\ y = y_A + t \times b + t' \times b' \\ z = z_A + t \times c + t' \times c' \end{cases} \text{ avec } t, t' \in \mathbb{R}$$

Ex : Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère $A(-3 ; 1 ; 2)$ et $B(1 ; -2 ; 4)$.

1° Déterminer une représentation paramétrique de (AB) .

2° Le point $C(-11 ; 8 ; -2)$ appartient-il à la droite (AB) ?

3° Déterminer le point d'intersection de (AB) et du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-3) \\ -2 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } (AB) \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

$$2^\circ \text{ Injectons les coordonnées de C dans l'équation de } (AB) : \begin{cases} -11 = -3 + 4t \\ 8 = 1 - 3t \\ -2 = 2 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t = -11 + 3 \\ \square \\ 3t = 1 - 8 \\ \square \\ 2t = -2 - 2 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} t = \frac{-8}{4} = -2 \\ t = \frac{-7}{3} \\ t = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Donc $C \notin (AB)$.

3° La particularité des points du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est que leur cote vaut 0.

Ainsi, $0 = 2 + 2t$

$$2t = -2$$

$$t = \frac{-2}{2} = -1$$

D'où $x = -3 + 4 \times (-1) = -7$ et $y = 1 - 3 \times (-1) = 4$

Le point d'intersection de (AB) et du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donc $(-7; 4; 0)$.

2° Exemples d'utilisation

Ex 1 : déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soient $M(0; 5; -8)$, $N(4; -3; 4)$ et $P(1; -1; -3)$ trois points.

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point P sur la droite (MN) .

$$\overrightarrow{MN} \text{ est directeur de } (MN) : \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ -3 - 5 \\ 4 - (-8) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\text{On peut également prendre } \frac{1}{4} \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ d'où } (MN) \begin{cases} x = t \\ \square \\ y = 5 - 2t \\ \square \\ z = -8 + 3t \end{cases}$$

$H \in (MN)$ donc $H(t; 5 - 2t; -8 + 3t)$.

De plus, on doit avoir $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ et donc $\overrightarrow{PH} \cdot \frac{1}{4} \overrightarrow{MN} = 0$

$$\overrightarrow{PH} \begin{pmatrix} t - 1 \\ 5 - 2t - (-1) \\ -8 + 3t - (-3) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{PH} \begin{pmatrix} t - 1 \\ 6 - 2t \\ -5 + 3t \end{pmatrix}$$

D'où : $(t - 1) \times 1 + (6 - 2t) \times (-2) + (-5 + 3t) \times 3 = 0$

$$t - 1 - 12 + 4t - 15 + 9t = 0$$

$$14t - 28 = 0$$

$$14t = 28 \text{ et donc } t = 2$$

D'où $H(2; 5 - 2 \times 2; -8 + 3 \times 2)$, c'est-à-dire $H(2; 1; -2)$.

Ex 2 : déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites

On considère les droites d'équations $(d): \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 10 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(d'): \begin{cases} x = -3 + 2t' \\ y = -9 + 3t' \\ z = 7 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$

Déterminer leur positions relatives.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires : (d) et (d') sont sécantes ou non coplanaires.

Pour différencier ces deux situations, on s'intéresse à l'intersection de (d) et (d') .

On va donc résoudre $\begin{cases} -t = -3 + 2t' \\ -1 + 2t = -9 + 3t' \\ 10 + 5t = 7 - t' \end{cases}$



Il est fondamental de choisir des paramètres différents !

$$\begin{cases} -t - 2t' = -3 \\ 2t - 3t' = -9 + 1 \\ 5t + t' = 7 - 10 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} t + 2t' = 3 \\ 2t - 3t' = -8 \\ 5t + t' = -3 \end{cases}$$

On commence par résoudre $\begin{cases} t + 2t' = 3 & (\times 2) \\ 2t - 3t' = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} 2t + 4t' = 6 \\ 2t - 3t' = -8 \end{cases}$

$$L_1 - L_2 : 7t' = 14$$

$$t' = \frac{14}{7} = 2$$

On remplace dans L_1 : $t + 2 \times 2 = 3$

$$t = 3 - 4 = -1$$

Reste à vérifier L_3 : $5 \times (-1) + 2 = -5 + 2 = -3$

(d) et (d') sont donc sécantes.

Leur point d'intersection H a pour coordonnées $\begin{cases} x = -(-1) = 1 \\ y = -1 + 2 \times (-1) = -3 \\ z = 10 + 5 \times (-1) = 5 \end{cases}$

Autrement dit, $H(1 ; -3 ; 5)$.

II Equation cartésienne d'un plan

1° Vecteur normal à un plan

Définition : Soient $\vec{n}$ un vecteur non nul et $\mathcal{P}$ un plan.

$\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$.

$\Rightarrow$ Deux vecteurs normaux à un même plan sont colinéaires

$\Rightarrow$ Réciproquement, tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur normal est un vecteur normal

Propriété : $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à une base de $\mathcal{P}$.

Preuve : Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base de $\mathcal{P}$. Supposons que $\vec{n}$ est orthogonal à $(\vec{u}, \vec{v})$.

Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque de $\mathcal{P}$. On a alors $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v})$$

$$= a\vec{n} \cdot \vec{u} + b\vec{n} \cdot \vec{v}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont donc orthogonaux, ce qui signifie que $\vec{n}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$.

Ex : vérifier que $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) où A(-1 ; -1 ; 0), B(1 ; -2 ; 1) et C(-3 ; 1 ; 2).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - (-1) \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 1 - (-1) \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + 3 \times (-1) - 1 \times 1$$

$$= 4 - 3 - 1 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 3 \times 2 - 1 \times 2$$

$$= -4 + 6 - 2 = 0$$

Or, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

Ex : déterminer un vecteur normal au plan de base $(\vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Notons $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le vecteur normal cherché. On doit avoir :

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} 2a + b - 2c = 0 \\ -a + 2b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Autrement dit, } \begin{cases} 2a + b = 2c \\ -a + 2b = -6c \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} 4a + 2b = 4c \\ -a + 2b = -6c \end{cases}$$

$$L_1 - L_2 : 5a = 10c$$

$$a = \frac{10c}{5} = 2c$$

On remplace dans L_1 : $2 \times 2c + b = 2c$

$$b = 2c - 4c = -2c$$

Donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 2c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$: on peut donc par exemple prendre le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2° Equation cartésienne d'un plan

Propriété : Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Propriété : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. Un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$

Réciproquement, l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c ne sont pas tous nuls est un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Preuve :
Soient $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et A(x_A, y_A, z_A) un point de $\mathcal{P}$.

On note M(x, y, z) un point quelconque de $\mathcal{P}$.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz + \underbrace{(-ax_A - by_A - cz_A)}_d = 0$$

A
U

P Réciproquement, soit (E) l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c ne sont pas tous nuls. Supposons par exemple $a \neq 0$.

R
O
G
R
A
M
M
E

Soit alors A $\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right)$: vérifions que A $\in$ (E)

$$a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0 \text{ donc } A \in (E)$$

$$\text{On considère alors le vecteur } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a \left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0)$$
$$= ax + by + cz + d$$
$$= 0$$

Donc M $\in$ (E) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$: on reconnaît le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Ex : soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - 3y + 5z - 2 = 0$. Un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Ex : déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par A(2 ; -1 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{P} \text{ a pour équation } -2x + 4y + z + d = 0$$

Par ailleurs, A $\in \mathcal{P}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathcal{P}$.

$$\text{D'où } -2 \times 2 + 4 \times (-1) + 3 + d = 0$$

$$-4 - 4 + 3 + d = 0$$

$$-5 + d = 0 \text{ et donc } d = 5$$

Le plan $\mathcal{P}$ a donc pour équation $-2x + 4y + z + 5 = 0$

Autre méthode : revenir à « $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ »

Même exemple : déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2; -1; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{On a } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (x-2) \times (-2) + (y+1) \times 4 + (z-3) \times 1 = 0$$

$$-2x + 4 + 4y + 4 + z - 3 = 0$$

$$-2x + 4y + z + 5 = 0$$

Ex : Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(3; -1; 5)$ et $B(-3; 1; -3)$ ainsi que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de B sur $\mathcal{P}$.
2. En déduire la distance de B à $\mathcal{P}$.

$$1. \text{ (BH) a pour vecteur directeur } \vec{n} \text{ donc (BH) : } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, $\mathcal{P}$ a pour équation $2x + 3y + z + d = 0$

$\mathcal{P}$ passe par A donc $2 \times 3 + 3 \times (-1) + 5 + d = 0$

$$6 - 3 + 5 + d = 0$$

$$8 + d = 0 \text{ c'est-à-dire } d = -8$$

$$\text{D'où } \mathcal{P} : 2x + 3y + z - 8 = 0$$

$$\text{H vérifie donc } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -3 + t \\ 2x + 3y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } 2(-3 + 2t) + 3(1 + 3t) + (-3 + t) - 8 = 0$$

$$-6 + 4t + 3 + 9t - 3 + t - 8 = 0$$

$$-14 + 14t = 0$$

$$14t = 14$$

$$t = 1$$

$$\text{On a alors } \begin{cases} x = -3 + 2 \times 1 = -1 \\ y = 1 + 3 \times 1 = 4 \\ z = -3 + 1 = -2 \end{cases}$$

H a donc pour coordonnées $(-1 ; 4 ; -2)$.

2. La distance de B à $\mathcal{P}$ est donc BH :

$$\begin{aligned} BH^2 &= (-1 + 3)^2 + (4 - 1)^2 + (-2 + 3)^2 \\ &= 2^2 + 3^2 + 1^2 \\ &= 4 + 9 + 1 \\ &= 14 \\ BH &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

Définition : le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu de $[AB]$ et perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\Rightarrow$ Le plan médiateur d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

Ex : Soient $R(5 ; 4 ; -3)$ et $S(-1 ; 0 ; -7)$. Déterminer l'équation du plan médiateur $\mathcal{P}$ du segment $[RS]$.

Soit I le milieu de $[RS]$. $I\left(\frac{5-1}{2} ; \frac{4+0}{2} ; \frac{-3-7}{2}\right)$ c'est à dire $I(2 ; 2 ; -5)$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} -1-5 \\ 0-4 \\ -7+3 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

On peut donc prendre comme vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

D'où $\mathcal{P} : 3x + 2y + 2z + d = 0$

$I \in \mathcal{P}$ donc $3 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times (-5) + d = 0$

$$6 + 4 - 10 + d = 0 \quad \text{donc} \quad d = 0$$

D'où $\mathcal{P} : 3x + 2y + 2z = 0$

III Position relative d'une droite et d'un plan

Soient (d) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

$\Rightarrow$ Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ alors (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants

$\Rightarrow$ Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ alors :

- $(d) \subset \mathcal{P}$ si un point quelconque de (d) appartient à $\mathcal{P}$.

- (d) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ si un point quelconque de (d) n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

Ex : Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 6 = 0$.
Etudier leurs positions relatives.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de (d) est $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times (-3) + (-3) \times 2 + 1 \times 1 = -11$$

Donc $\mathcal{P}$ et (d) sont sécants.

Leur point d'intersection vérifie $\begin{cases} x = 5 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + t \\ 2x - 3y + z - 6 = 0 \end{cases}$

D'où $2(5 - 3t) - 3(-1 + 2t) + 4 + t - 6 = 0$ en injectant x, y et z dans l'équation de $\mathcal{P}$

$$10 - 6t + 3 - 6t + 4 + t - 6 = 0$$

$$-11t + 11 = 0$$

$$-11t = -11 \text{ c'est-à-dire } t = 1$$

On obtient alors $\begin{cases} x = 5 - 3 \times 1 = 2 \\ y = -1 + 2 \times 1 = 1 \\ z = 4 + 1 = 5 \end{cases}$

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et (d) est donc $(2 ; 1 ; 5)$.

Remarque : on peut résoudre directement le système, sans préalablement calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

- une seule solution : (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants
- pas de solutions : (d) est strictement parallèle à $\mathcal{P}$
 $\Rightarrow$ en conservant (d) et avec $\mathcal{P}: 2x - 3y + 12z - 6 = 0$, on arrive à $55 = 0$
- une infinité de solutions : $(d) \subset \mathcal{P}$
 $\Rightarrow$ en conservant (d) et avec $\mathcal{P}: 2x - 3y + 12z - 61 = 0$, on arrive à $0 = 0$

Position relative de deux plans

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- $\Rightarrow$ Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite (d)
 $\Rightarrow$ Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires alors :
 - $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles si un point quelconque de $\mathcal{P}$ n'appartient pas à $\mathcal{P}'$
 - $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus si un point quelconque de $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{P}'$

Ex : Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x - y - 5z - 1 = 0$ et $\mathcal{Q}$ le plan d'équation $-x + 2y + z - 4 = 0$
 Etudier leurs positions relatives.

Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{Q}$ est $\vec{n}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants suivant une droite (d).

$M(x; y; z) \in (d)$ si ses coordonnées vérifient simultanément les équations des deux plans.

Autrement dit, on doit avoir
$$\begin{cases} 2x - y - 5z - 1 = 0 \\ -x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Pour trouver l'équation paramétrique de cette droite, on choisit l'une des « inconnues » (x, y ou z) comme paramètre. Dans cet exemple, prenons z . Cela donne :

$$\begin{cases} 2x - y - 5z - 1 = 0 \\ -x + 2y + z - 4 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Autrement dit, on a
$$\begin{cases} 2x - y - 5t - 1 = 0 \\ -x + 2y + t - 4 = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{et donc} \quad \begin{cases} 2x - y = 5t + 1 \\ -x + 2y = -t + 4 \\ z = t \end{cases}$$

On multiplie la deuxième ligne du système par 2 :

$$\begin{cases} 2x - y = 5t + 1 \\ -2x + 4y = -2t + 8 \\ z = t \end{cases}$$

Par addition, on obtient :

$$\begin{aligned} 3y &= 3t + 9 \\ y &= t + 3 \end{aligned}$$

On remplace dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} -x + 2 \times (t + 3) &= -t + 4 \\ -x + 2t + 6 &= -t + 4 \\ 2t + 6 + t - 4 &= x \\ 3t + 2 &= x \end{aligned}$$

Au final, l'équation paramétrique de (d) est
$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Remarque : en prenant y comme paramètre par exemple, on aurait obtenu
$$\begin{cases} x = 3t - 7 \\ y = t \\ z = t - 3 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$