

PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

I Rappels (enfin, théoriquement...)

On appelle norme d'un vecteur la **longueur** de ce vecteur. On la note $\|\vec{u}\|$ et on a donc $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Attention : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

❶ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

$\hookrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 [2\pi]$

Ainsi, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires et de même sens**, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

$\hookrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi [2\pi]$

Ainsi, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires et de sens opposés**, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AC$

$\hookrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

On en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Cas particulier : on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow$ on pourra également noter $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$



$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC}$ mais $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \neq \widehat{BAC}$: il faut que les vecteurs aient la même origine...

❷ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \Rightarrow$ « formule de polarisation »

Il en existe deux autres versions, mais celle-ci suffit.

- lorsque la relation de Chasles s'applique avec les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$$

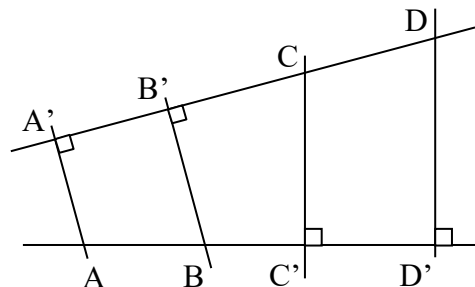
- lorsque la relation de Chasles ne s'applique pas avec les deux vecteurs :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2)$$

❸ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$

par projections orthogonales.

Intérêt : les vecteurs sont alors **colinéaires** !



❹ Avec $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$ uniquement dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$

Propriétés : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et les réels a et b , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (a \times b)\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{D'où : } (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

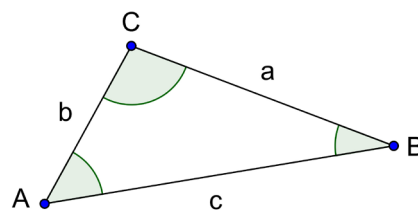
$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Application : formule d'Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

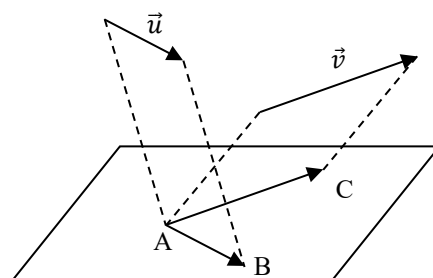
$\Rightarrow$ c'est une généralisation du théorème de Pythagore



II Produit scalaire dans l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et soient A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, défini dans le plan (ABC).



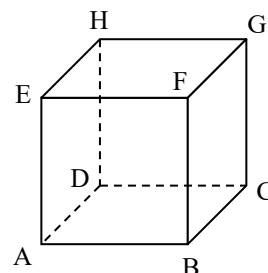
Les règles de calcul et les propriétés du produit scalaire dans le plan sont donc toujours vraies dans l'espace ; et notamment, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Ex : Soit ABCDEFGH un cube d'arête a .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} \text{ en se ramenant dans le plan (ABF)}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ par projection orthogonale}$$

$$= AB^2 = a^2$$



Propriété : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$$\text{On a alors } \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ et } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$

Preuve : On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + x\vec{i} \cdot z'\vec{k} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot z'\vec{k} + z\vec{k} \cdot x'\vec{i} + z\vec{k} \cdot y'\vec{j} + z\vec{k} \cdot z'\vec{k}$$

Or, $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = \|\vec{i}\|^2 = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ car le repère est orthonormé.

$$\text{D'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\text{Et de là, } \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$$

L'espace offre plus de possibilités pour les projections orthogonales, mais avant, il faut définir les choses.

III Orthogonalité dans l'espace

1° De deux droites

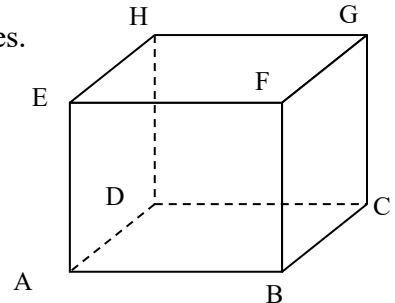
Définition : deux droites sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires.

Et de manière pratique, deux droites sont orthogonales si leurs **vecteurs directeurs** sont orthogonaux.

Ex : Soit ABCDEFGH un pavé droit.

(EF) et (BC) sont orthogonales car (EF) et (FG) sont perpendiculaires.

$$\begin{aligned} \text{(EG) et (FB) sont orthogonales car } \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FB} &= (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) \cdot \overrightarrow{FB} \\ &= \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FB} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$



Remarque : deux droites perpendiculaires sont **coplanaires ET sécantes**.



Deux droites **perpendiculaires** sont **orthogonales**, mais deux droites **orthogonales** ne sont pas nécessairement **perpendiculaires** (il faudrait qu'elles soient **coplanaires**)

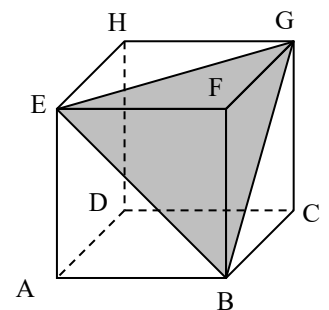
Par exemple, (EG) et (FB) sont orthogonales mais ne sont pas perpendiculaires...

2° D'une droite et d'un plan

Définition : une droite est perpendiculaire à un plan si elle est **orthogonale à deux droites sécantes de ce plan**. Autrement dit, une droite (d) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si un **vecteur directeur de (d)** est **orthogonal à une base de $\mathcal{P}$** .

Ex : Soit ABCDEFGH un cube d'arête a . Démontrer que (FD) $\perp$ (EGB)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EG} &= (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) \\ &= \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= 0 + 0 - \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EF} + 0 + 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -a^2 + a^2 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EG} &= (\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{EG} \\ &= \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{EG} \\ &= 0 + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

De même, $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$

Donc (FD) est orthogonale aux droites (EG) et (EB) qui sont sécantes dans le plan (EGB) : on peut en conclure que (FD) $\perp$ (EGB)

Théorème : Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Preuve : Soit (d) une droite perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$.

(d) est donc orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de $\mathcal{P}$.

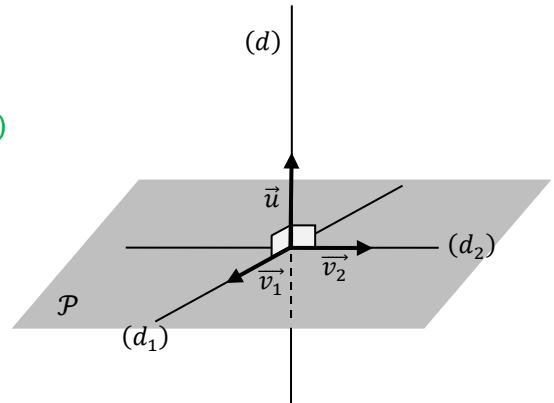
Soit alors (Δ) une droite quelconque de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{w}$.

On veut montrer que $(d) \perp (\Delta)$, c'est-à-dire que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

(d_1) et (d_2) étant sécantes, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\mathcal{P}$: il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot (x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2) \\ &= x \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_1}_0 + y \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $(d) \perp (\Delta)$



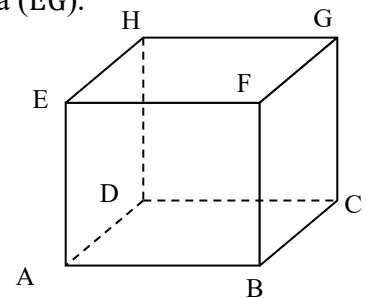
Ex : Soit ABCDEFGH un pavé droit. Démontrer que (FB) est orthogonale à (EG).

$(FB) \perp (EF)$ et $(FB) \perp (FG)$ donc $(FB) \perp (EFG)$

Par conséquent, (FB) est orthogonale à toute droite de (EFG) .

Et en particulier, (FB) est orthogonale à (EG) .

Remarque : on l'avait démontré dans le III 1° à l'aide d'un produit scalaire...

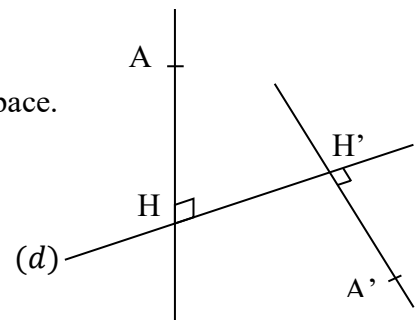


IV Projection orthogonale

1° Définitions

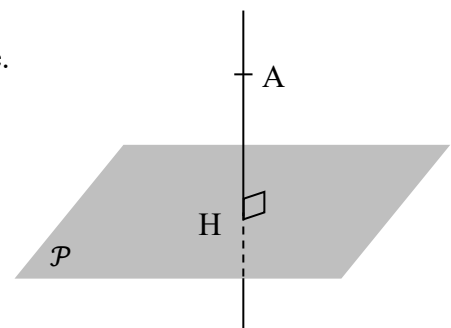
Définition : Soient A un point de l'espace et (d) une droite de l'espace.

La projection orthogonale de A sur (d) est le point H de (d) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d) .



Définition : Soient A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.

La projection orthogonale de A sur $\mathcal{P}$ est le point H de $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) soit perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.



2° Application au calcul d'un produit scalaire

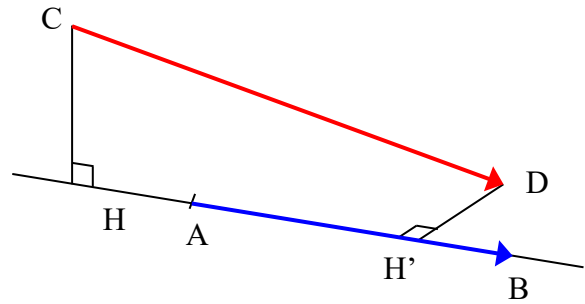
⇒ Lors du calcul d'un produit scalaire, on peut remplacer l'un des deux vecteurs par son projeté

orthogonal sur la droite portée par l'autre vecteur :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$$

où H et H' sont les projetés orthogonaux de C

et D sur (AB)



Preuve : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'D})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H'D}$$

$$= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} + 0$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$$

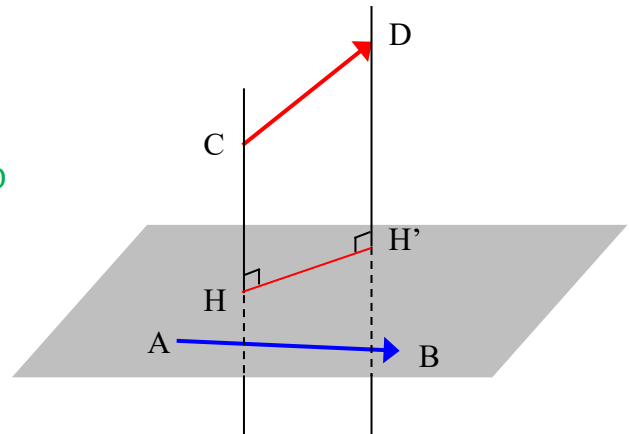
⇒ Lors du calcul d'un produit scalaire, on peut remplacer l'un des deux vecteurs par son projeté

orthogonal sur un plan contenant l'autre vecteur :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$$

où H et H' sont les projetés orthogonaux de C et D

sur $\mathcal{P}$



Preuve : idem que la preuve précédente...

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H'D}$$

Or, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$ car $\overrightarrow{CH}$ est normal à $\mathcal{P}$ et donc orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{P}$

De même, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{H'D} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HH'}$



Toujours bien préciser ce qu'on projette et sur quoi on le projette.

Ex : soit ABCDEFGH un cube de côté a .

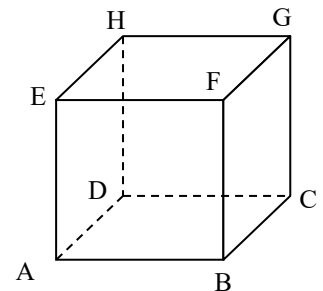
$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} = a^2 \text{ par projection orthogonale de } \overrightarrow{DF} \text{ sur } (DA)$$

ou $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$ par projection orthogonale de F sur (DBA) puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA}$ par projection orthogonale

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ par projection orthogonale de } \overrightarrow{DF} \text{ sur } (ABC)$$

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HG} = a^2 \text{ par projection orthogonale de } \overrightarrow{DF} \text{ sur } (HG)$$

ou $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{HG}$ par projections orthogonales de D et F sur (HDG)



3° Distance d'un point à une droite / à un plan

Définition : Soient A un point et (d) une droite.

La distance de A à (d) est la plus petite distance entre A et un point de (d) .

Propriété : La distance de A à (d) est la longueur AH où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) .

Autrement dit, le projeté orthogonal de A sur (d) est le point de (d) le plus proche de A.

Définition : Soient A un point et $\mathcal{P}$ un plan.

La distance de A à $\mathcal{P}$ est la plus petite distance entre A et un point de $\mathcal{P}$.

Propriété : La distance de A à $\mathcal{P}$ est la longueur AH où H est le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Autrement dit, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Preuve : Soient H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$, et M un point quelconque de $\mathcal{P}$.

A
U (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$ donc (AH) est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$.

P En particulier, (AH) est perpendiculaire à (HM).

R Le triangle AHM est donc rectangle en H.

O D'après le théorème de Pythagore, on a alors $AM^2 = AH^2 + HM^2$

G Or, si $M \neq H$ alors $HM^2 > 0$ et donc $AM^2 > AH^2$.

R AH est donc bien la plus petite distance entre A et un point de $\mathcal{P}$.

