

CONTINUITÉ

I Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

On dit que f est continue en a lorsque $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout réel de I .

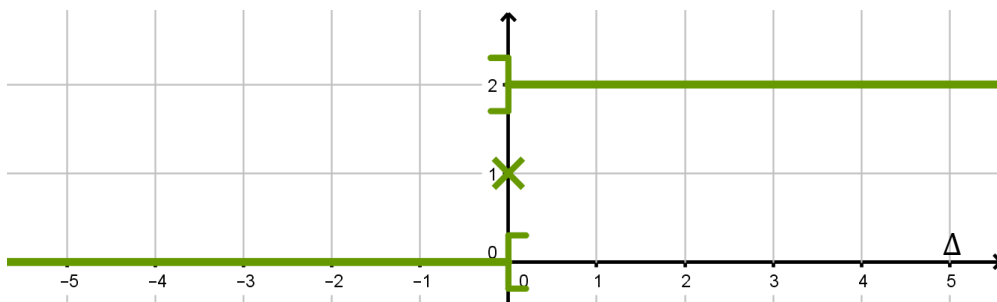
⇒ Graphiquement, cela signifie que sa représentation graphique ne présente aucun point de rupture : on peut la tracer sans lever le crayon.

La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leur ensemble de définition : polynômes, fonctions rationnelles, fonctions racines carrées, fonctions sinus, cosinus...

Important : toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur ce même intervalle.

Attention : la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ présente une rupture graphique mais elle est continue sur son ensemble de définition ! Il est normal que là où elle n'est pas définie on ait une « anomalie » graphique...

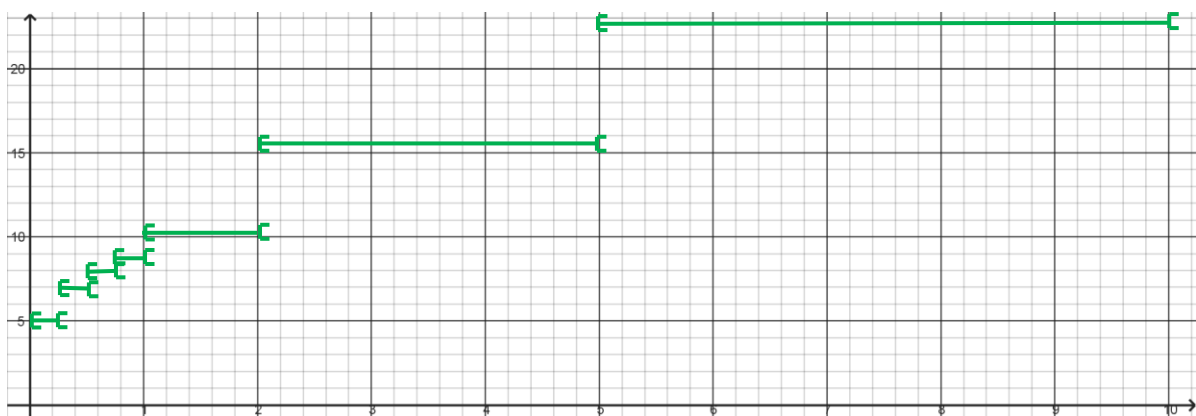
C-ex 1 : On considère la fonction f qui associe au discriminant Δ d'un trinôme le nombre de racines réelles de ce trinôme. Par exemple, $f(-5) = 0$, $f(9) = 2$ et $f(0) = 1$.



Cette fonction n'est pas continue en 0 : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$, $f(0) = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 2$

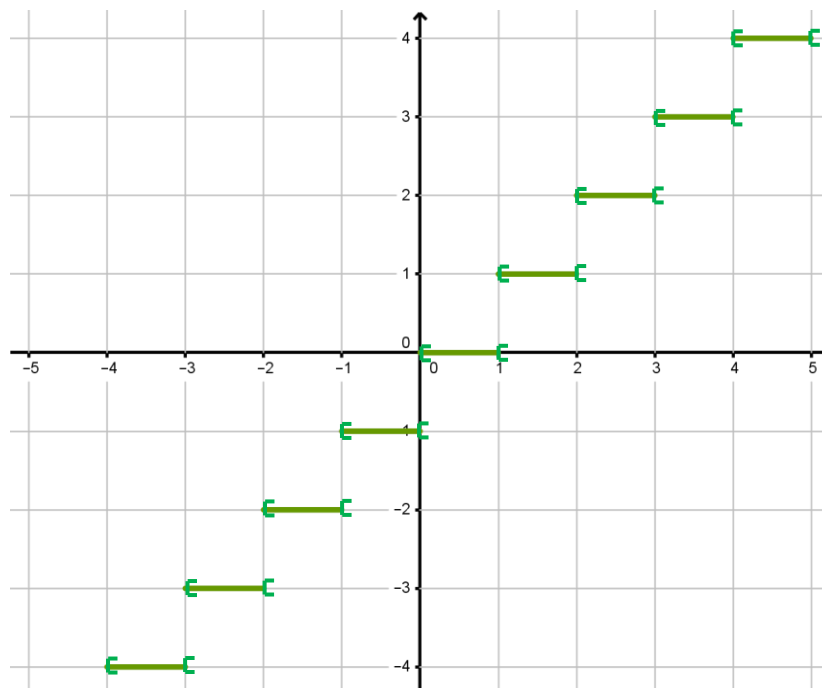
C-ex 2 : Voici les tarifs d'expédition d'un colis au départ et à destination de la France :

Poids jusqu'à	250 g	500 g	750 g	1 kg	2 kg	5 kg	10 kg
Tarif en €	4,99	6,99	8,10	8,80	10,15	15,60	22,70



C-ex 3 :

Idem avec la fonction mathématique « partie entière » qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x .



Propriété : Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I . Les fonctions $u + v$, ku (avec $k \in \mathbb{R}$), $u \times v$ et u^n sont continues sur I . Et $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.

Autrement dit, toutes les opérations usuelles sont compatibles avec la continuité, moyennant que les ensembles de définition soient respectés (pour les quotients).

Exercice : On définit la fonction f de la manière suivante : $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 2 \\ 0,5x + a & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Déterminer la valeur de a de manière à ce que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$.

On a d'une part $f(2) = 0,5 \times 2 + a = 1 + a$

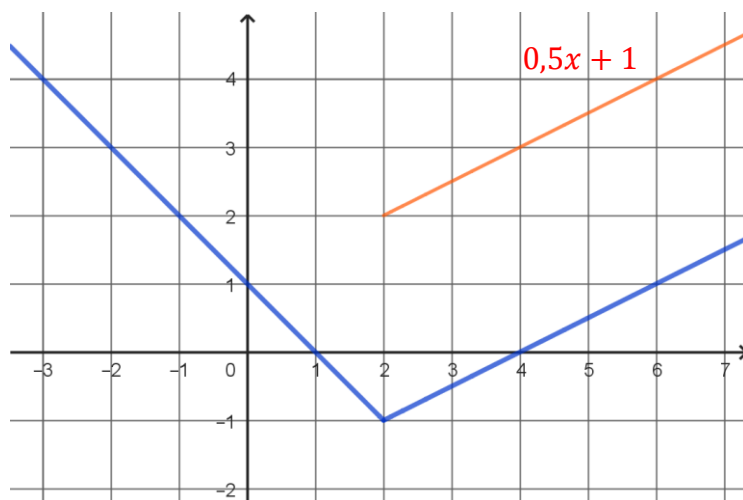
Par ailleurs, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = 1 - 2 = -1$

Pour que f soit continue, il faut donc que :

$$1 + a = -1$$

$$a = -1 - 1$$

$$a = -2$$



« Soit (u_n) une suite définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un réel ℓ , alors $\ell = f(\ell)$ » : ce résultat n'est vrai que si f est continue.

II Théorème des valeurs intermédiaires

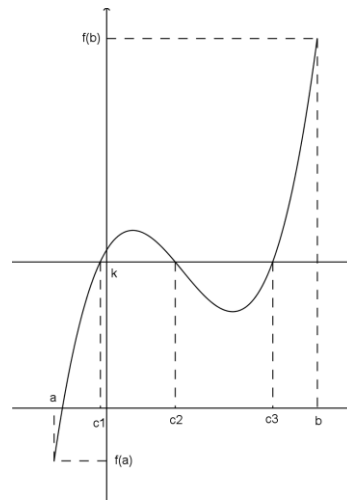
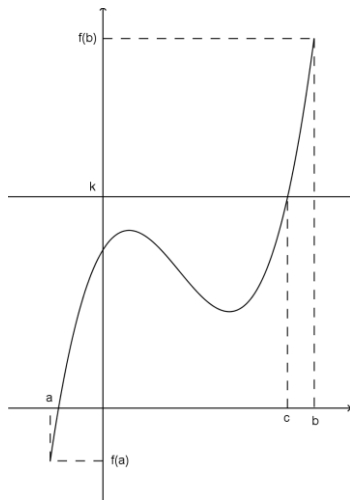
Théorème : soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Soit k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est-à-dire une valeur intermédiaire !)

L'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

⇒ Ce théorème permet de savoir si une équation admet ou pas des solutions.

⇒ Ce théorème ne permet pas de déterminer les valeurs des solutions de cette équation



Cas particulier : (Théorème de la bijection)

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

Soit k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

L'équation $f(x) = k$ admet une unique solution comprise entre a et b .

Preuve : considérons le cas dans lequel f est strictement croissante.

Soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$. On a alors $f(a) < f(b)$ car f est strictement croissante.

Soit k un réel tel que $f(a) < k < f(b)$.

Le TVI prouve qu'il existe au moins un réel $c \in]a ; b[$ tel que $f(c) = k$.

Supposons qu'il existe une seconde solution c' telle que $f(c') = k$.

Si $c' < c$ alors $f(c') < f(c)$ car f est strictement croissante, c'est-à-dire $k < k$: impossible.

Et si $c' > c$, impossible pour les mêmes raisons.

On en déduit que $c = c'$, c'est-à-dire que la seule solution de l'équation $f(x) = k$ est $x = c$.

Remarque : le TVI reste vrai sur des intervalles de tous types en remplaçant éventuellement les images des bornes par les limites.

Par exemple, sur $[a ; +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet des solutions si k est compris entre $f(a)$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Ex : Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 9]$ par $f(x) = -0,5x^3 + 3x^2 + 7,5x + 10$.
Démontrer que l'équation $f(x) = -24$ admet une unique solution sur $[-3 ; 9]$.

⇒ On ne demande pas de résoudre l'équation, mais seulement de démontrer qu'il existe une unique solution.

$$f'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 3 \times 2x + 7,5$$

$$= -1,5x^2 + 6x + 7,5$$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-1,5) \times 7,5$$

$$= 36 + 45$$

$$= 81$$

$$x_1 = \frac{-6 - 9}{2 \times (-1,5)}$$

$$x_2 = \frac{-6 + 9}{-3}$$

$$= \frac{-15}{-3} = 5$$

$$= \frac{3}{-3} = -1$$

x	-3	-1	5	9
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	28	6	60	-44

Sur $[-3 ; 5]$, le minimum de $f(x)$ est 6 donc $f(x) = -24$ n'admet pas de solution.

- ❶ La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[5 ; 9]$.
- ❷ $f(5) = 60 > -24$ et $f(9) = -44 < -24$
- ❸ D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = -24$ admet une unique solution α sur $[5 ; 9]$.

L'équation $f(x) = -24$ admet donc une unique solution α sur $[-3 ; 9]$, et $5 \leq \alpha \leq 9$

Remarque : Si on avait dû résoudre $f(x) = 50$, on aurait dit que :

- Pas de solution sur $[-3 ; -1]$ car le maximum est 28
- Une solution sur $[-1 ; 5]$ en appliquant le TVI proprement
- De même, une solution sur $[5 ; 9]$
- Deux solutions sur $[-3 ; 9]$ en conclusion

III Approximation des solutions

L'objectif est d'obtenir un encadrement / une valeur approchée des solutions d'une équation.

Reprenons la fonction f définie par $f(x) = -0,5x^3 + 3x^2 + 7,5x + 10$.

On a vu dans le paragraphe précédent que l'équation $f(x) = -24$ admet une unique solution α comprise entre 5 et 9.

Méthode 1 : le balayage

L'idée est de calculer plusieurs valeurs de la fonction, pour appliquer le TVI plus finement. Mais de manière automatique avec la table de valeurs pour gagner du temps...

D'après le travail précédemment effectué, on paramètre le début de la table à 5. Et on commence avec un pas de 1.

$$f(8) \geq -24 \text{ et } f(9) \leq -24 \text{ donc } 8 \leq \alpha \leq 9.$$

On recommence en choisissant le début de la table à 8 et avec un pas de 0,1.

$$f(8,6) \geq -24 \text{ et } f(8,7) \leq -24 \text{ donc } 8,6 \leq \alpha \leq 8,7.$$

On recommence en choisissant le début de la table à 8,6 et avec un pas de 0,01.

$$f(8,64) \geq -24 \text{ et } f(8,65) \leq -24 \text{ donc } 8,64 \leq \alpha \leq 8,65.$$

Et on continue autant que nécessaire, jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

Par exemple, un encadrement à 10^{-3} près est $8,644 \leq \alpha \leq 8,645$.

Remarques : 1. Si l'on demande une *valeur approchée* de α à 10^{-3} près, on peut choisir n'importe laquelle des deux.

Mais si l'on demande un *arrondi* de α à 10^{-3} près, il faut aller un cran plus loin : on obtient $8,6449 \leq \alpha \leq 8,6450$. Autrement dit, $\alpha \approx 8,645$ à 10^{-3} près.

2. Pour *justifier* l'encadrement $8,64 \leq \alpha \leq 8,65$ par exemple, il suffit de dire que :

$$f(8,64) \approx -23,74 > -24 \text{ et } f(8,65) \approx -24,26 < -24$$

3. On peut montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3 ; 9]$.

Si on note β cette solution, alors $\beta \approx 8,1$ à 10^{-1} . D'où le tableau de signes de $f(x)$:

x	-3	β	9
$f(x)$	+	0	-



β et pas 8,1

Méthode 2 : la calculatrice, sans rien comprendre ☺



Touche « résol », menu « Résoudre... »

Dans E1, entrer $f(x)$ et dans E2, entrer -24 (c'est-à-dire la valeur de k).

Valider avec la touche « graphe ».

Dans X, entrer la valeur à partir de laquelle on veut chercher une solution.

Valider avec la touche « graphe ».

Pour l'équation $f(x) = -0,5x^3 + 3x^2 + 7,5x + 10 = -24$, on obtient $\alpha \approx 8,6449830647262...$

Méthode 3 : la dichotomie

L'idée est de reprendre la méthode 1 mais de manière plus « mécanique » pour aboutir à un algorithme.



On peut se ramener à $g(x) = 0$ en posant $g(x) = f(x) - (-24) = f(x) + 24$

$g(8) > 0$ et $g(9) < 0$ ce qui fait que $8 \leq \alpha \leq 9$ d'après le TVI.

On observe ensuite que $g(8,5) > 0$ d'où $8,5 \leq \alpha \leq 9$ d'après le TVI.

Puis $g(8,75) < 0$ et donc $8,5 \leq \alpha \leq 8,75$ d'après le TVI.

Et on recommence avec $g\left(\frac{8,5 + 8,75}{2}\right) = g(8,625) > 0$ donc $8,625 \leq \alpha \leq 8,75$ Etc...

Cela donne la méthode suivante :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a ; b]$, avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

D'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in [a ; b]$.

On souhaite déterminer un encadrement de cette solution α avec une précision donnée p .

On coupe l'intervalle en deux en posant $m = \frac{a + b}{2}$.

$\Rightarrow$ Si $f(m) > 0$ alors α est compris entre a et m car $f(a) < 0$ et $f(m) > 0$.

Le nouvel intervalle dans lequel se trouve la solution est donc $[a ; m]$ (au lieu de $[a ; b]$)

$\Rightarrow$ Si $f(m) < 0$ alors α est compris entre m et b car $f(m) < 0$ et $f(b) > 0$.

Le nouvel intervalle dans lequel se trouve la solution est donc $[m ; b]$ (au lieu de $[a ; b]$)

On réitère alors ce procédé en remplaçant l'intervalle de départ $[a ; b]$ par l'intervalle $[a ; m]$ ou l'intervalle $[m ; b]$: on prend le milieu du nouvel intervalle, on teste, on change l'intervalle, etc.

Pour savoir si la solution est dans $[a ; m]$ ou $[m ; b]$, il suffit de « calculer » $f(a) \times f(m)$:

$\Rightarrow$ Si $f(a) \times f(m) > 0$ alors $f(a)$ et $f(m)$ ont le même signe : la solution de $f(x) = 0$ se trouve alors dans l'intervalle $[m ; b]$

$\Rightarrow$ Sinon, la solution de $f(x) = 0$ se trouve dans l'intervalle $[a ; m]$

Algorithme : Demander f, a, b et p

Tant que $b - a > p$

Affecter $\frac{a + b}{2}$ à m

Si $f(a) \times f(m) > 0$

Affecter m à a

Sinon

Affecter m à b

Fin Si

Fin Tant que

Afficher a et b



Cet algorithme permet de

résoudre $f(x) = 0$