

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I Géométrie vectorielle

Tout comme un vecteur du plan, un vecteur de l'espace est défini par une **direction**, un **sens** et une **longueur** (également appelée **norme**).

La géométrie vectorielle du plan se généralise à l'espace : relation de Chasles, notion de colinéarité...

Pour rappel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \vec{u} = \lambda \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction)

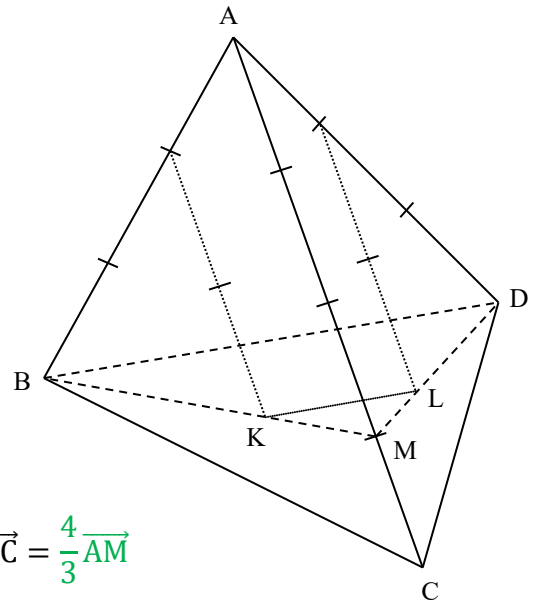
Ex : ABCD est un tétraèdre, et K, L et M sont définis par les relations

$$\begin{cases} \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \end{cases}$$

1. Montrer que (KL) // (BD).
2. Montrer que K, M et B alignés.

$$\begin{aligned} 1. \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AL} \\ &= -\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \quad \text{donc (KL) // (BD).} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} \\ &= \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} \quad \text{car } \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \quad \text{donc K, M et B sont alignés.} \end{aligned}$$

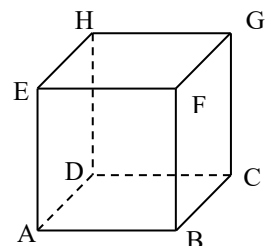


« coplanaire » signifie « être dans un même plan » (c'est-à-dire une surface plane)

Ainsi, deux vecteurs **sont toujours coplanaires** : un vecteur n'a en effet pas de position dans l'espace car il représente un mouvement (ce n'est pas un « segment avec une flèche au bout »).



Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires. En effet, $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont « visuellement coplanaires ». Mais $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ ne définissent pas un plan : il leur manque un point (origine). Ils définissent seulement la direction d'un plan. Et de la même manière, le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FG}$ soient coplanaires n'implique pas que (AB) et (FG) le soient.



II Droites et plans de l'espace

1° Caractérisation vectorielle

⇒ La droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

⇒ Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ détermine la direction de $\mathcal{P}$ et que $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de $\mathcal{P}$.

Par exemple, le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ (c'est un exemple)

Cette définition indique donc que l'on peut définir un plan par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires non nuls.

De même, trois points ne définissent pas nécessairement un plan : il ne faut pas qu'ils soient alignés (pas de vecteurs colinéaires)

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur de la forme $x\vec{u} + y\vec{v}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

2° Position relative de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$

La position relative de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ peut être caractérisée par leur intersection.

- Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
- Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (d)$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants (selon cette droite (d) ...)
- Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P}$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus

Ex : ABCD est un tétraèdre, I, J et K des points de [AB], [AC], [AD]. E, F et G sont les points d'intersection de deux droites comme indiqué sur la figure.

Démontrer que les points E, F et G sont alignés.

$F \in (IK)$ donc $F \in (IJK)$

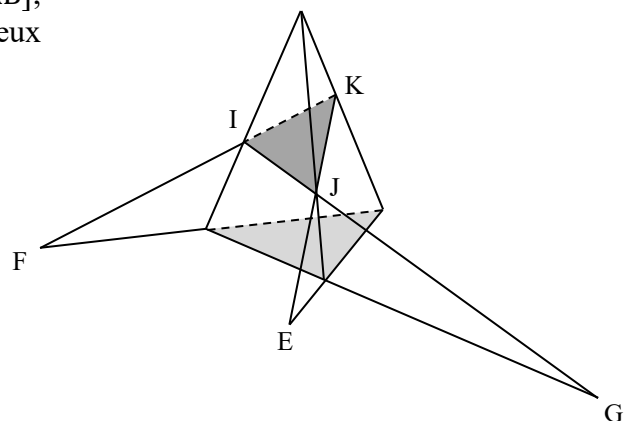
$F \in (BD)$ donc $F \in (BCD)$

Donc $F \in (BCD) \cap (IJK)$

De même, E et G appartiennent à (BCD) et (IJK) .

Or, (BCD) et (IJK) ne sont pas confondus et sont donc sécants selon une droite.

Et E, F, et G appartiennent tous les trois à cette droite : ils sont donc alignés !





Si deux plans ont trois points communs alors ... on ne peut rien dire ! Il faut que ces trois points ne soient pas alignés, alors les plans sont confondus. Sinon...

3° Position relative d'une droite (d) et d'un plan $\mathcal{P}$

La position relative de (d) et $\mathcal{P}$ peut être caractérisée par leur intersection.

- Si $(d) \cap \mathcal{P} = \emptyset$ alors (d) et $\mathcal{P}$ sont parallèles.
- Si $(d) \cap \mathcal{P} = \{A\}$ alors (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants.
- Si $(d) \cap \mathcal{P} = (d)$ alors $(d) \subset \mathcal{P}$.

$\Rightarrow$ Si deux points A et B sont dans un plan $\mathcal{P}$ alors toute la droite (AB) est dans $\mathcal{P}$.

4° Positions relatives de deux droites (d) et (d')

On commence généralement par regarder si (d) et (d') sont ou non coplanaires.

Si (d) et (d') sont coplanaires, elles peuvent être sécantes ou parallèles (et éventuellement confondues dans ce cas)

$\Rightarrow$ Deux droites sécantes sont nécessairement coplanaires.

$\Rightarrow$ Deux droites coplanaires et non parallèles sont nécessairement sécantes.

$\Rightarrow$ Pour montrer que deux droites sont parallèles, il faut donc préalablement montrer qu'elles sont coplanaires

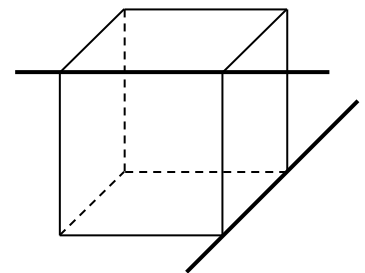
Si $(d) \cap (d') = \emptyset$ (c'est-à-dire que ces deux droites ne se coupent



jamais), cela ne signifie pas forcément qu'elles sont parallèles !

Il faut qu'elles soient coplanaires.

En revanche, si $(d) \parallel (d')$ alors $(d) \cap (d') = \emptyset$



Ex : Soit ABCDEFGH un cube, I, J et K les milieux de [AE], [BF] et [GH].

(GH) et (DC) : coplanaires, strictement parallèles

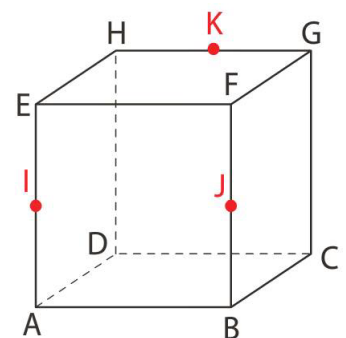
(AE) et (DI) : coplanaires, sécantes

(DC) et (FG) : non coplanaires

(EA) et (CG) : coplanaires, strictement parallèles

(IJ) et (AK) : non coplanaires (si elles étaient coplanaires, alors K serait dans la face avant car A, I, J y sont)

(EK) et (FG) : coplanaires, sécantes



III Repérage dans l'espace

1° Vecteurs coplanaires

Définition : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Autrement dit, l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des deux autres.

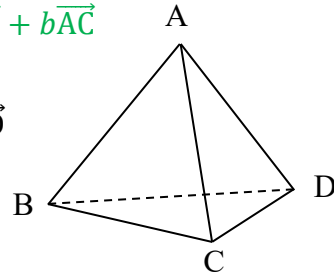
Preuve : on choisit A, B, C et D quatre points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, alors les points A, B et C définissent un plan.

Ainsi, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ coplanaires $\Leftrightarrow D \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

Ex : On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.



$$\text{On a } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V2 : } \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

Etc...

Donc $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Méthode : comment montrer que quatre points sont coplanaires ?

Pour montrer que R, S, T et U sont coplanaires, il faut par exemple montrer que $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RT}$ et $\overrightarrow{RU}$ sont coplanaires, c'est-à-dire que $\overrightarrow{RS} = a\overrightarrow{RT} + b\overrightarrow{RU}$. (on se sert généralement de l'une des 4 lettres comme d'un « pivot »)

Dans l'exemple précédent, on peut par exemple affirmer que A, B, C et E sont coplanaires.

2° Coordonnées

Définition : On appelle base de l'espace un triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ composé de trois vecteurs non coplanaires.

Un repère de l'espace est un quadruplet $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ dans lequel $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est une base de l'espace et O un point quelconque appelé origine du repère. $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ définissent alors les axes des abscisses, des ordonnées et des côtes. Et leurs normes définissent les unités de ces trois axes.

Remarque : si les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**. Et si de plus ils ont la même norme, le repère est dit **orthonormé**.

Propriété : Soit $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Autrement dit, tout vecteur se décompose de manière unique en fonction des vecteurs d'une base.

La décomposition (unique) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ du vecteur $\vec{u}$ dans la **base** $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Et si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, la décomposition $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les **coordonnées** $(x; y; z)$ du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: x est son **abscisse**, y son **ordonnée** et z sa **côte**.

Preuve : elle se décompose en deux étapes

⇒ Existence : notons $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas colinéaires car sinon $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ seraient **coplanaires**.

Notons alors $\mathcal{P}$ le plan de **repère** $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Si $B \in \mathcal{P}$ alors $\overrightarrow{AB}$ se décompose suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Fin.

Supposons donc que $B \notin \mathcal{P}$. Soit alors (d) la droite passant par B et de **vecteur directeur** $\vec{k}$.

$\vec{k}$ n'étant pas coplanaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, (d) coupe $\mathcal{P}$ en un point C.

On a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Or, $\overrightarrow{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$ car $\overrightarrow{AC}$ est dans $\mathcal{P}$

De plus, $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$ car $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire à $\vec{k}$.

D'où $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

⇒ Unicité : supposons que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

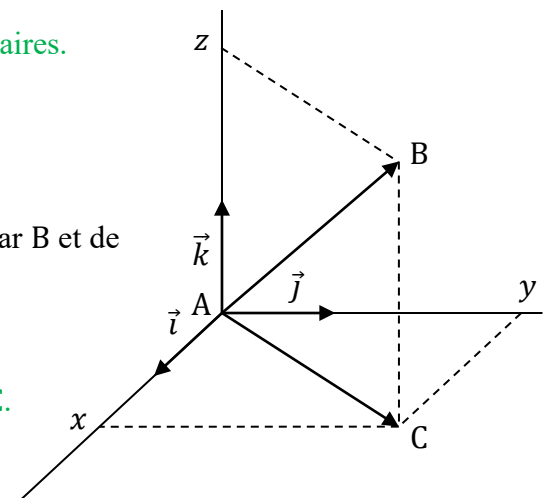
On aurait alors $(x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$

Si $x - x' \neq 0$ par exemple, alors $\vec{i} + \frac{y - y'}{x - x'}\vec{j} + \frac{z - z'}{x - x'}\vec{k} = \vec{0}$

$$\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j} + \frac{z' - z}{x - x'}\vec{k}$$

Or, c'est impossible car cela signifierait que $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ sont **coplanaires** !

Donc $x - x' = 0$, c'est-à-dire $x = x'$. Et de même, on prouve que $y = y'$ et $z = z'$.



Ex : Soit ABCDEFGH un pavé droit.

Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H :

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$

$$A(0; 0; 0)$$

$$B(1; 0; 0)$$

$$C(1; 1; 0)$$

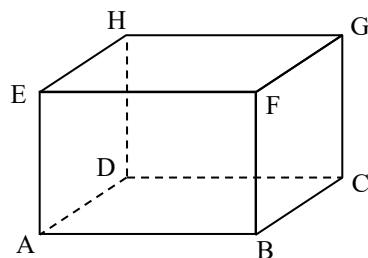
$$D(0; 1; 0)$$

$$E(0; 0; 1)$$

$$F(1; 0; 1)$$

$$G(1; 1; 1)$$

$$H(0; 1; 1)$$



2. Dans le repère $(H; \overrightarrow{HD}; \overrightarrow{HG}; \overrightarrow{HE})$

$$A(1; 0; 1)$$

$$B(1; 1; 1)$$

$$C(1; 1; 0)$$

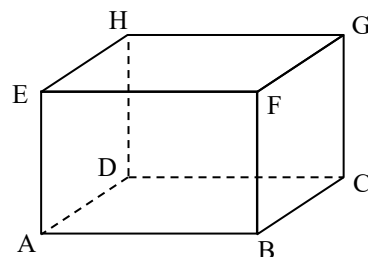
$$D(1; 0; 0)$$

$$E(0; 0; 1)$$

$$F(0; 1; 1)$$

$$G(0; 1; 0)$$

$$H(0; 0; 0)$$



Propriétés : Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On a alors :

$$\star \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$$\star \text{ Si I est le milieu de } [AB], \text{ alors } I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

$$\star AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 \quad \text{uniquement lorsque le repère est}$$

orthonormé

Par ailleurs, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx' \\ ky' \\ kz' \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$

Ex : Dans l'espace muni d'un repère, on donne $A(0; 1; -1)$, $B(-2; 4; 0)$, $C(-1; 2; -3)$ et $D(1; -1; -2)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment-ils une base de l'espace ?

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 4 - 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 - 0 \\ 2 - 1 \\ -3 + 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -1 - 1 \\ -2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ forment une base de l'espace s'ils ne sont pas coplanaires.
Supposons que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ soient coplanaires.

On aurait alors par exemple $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$

$$\begin{cases} -2 = -a + b \\ 3 = a - 2b \\ 1 = -2a - b \end{cases}$$

Considérons par exemple $\begin{cases} -2 = -a + b \\ 3 = a - 2b \end{cases}$

$$L_1 + L_2 : 1 = -b$$

$$-1 = b$$

$$L_2 : 3 = a - 2 \times (-1)$$

$$3 = a + 2$$

$$3 - 2 = a = 1$$

$$\text{Reste à vérifier } L_3 : -2a - b = -2 \times 1 - (-1) = -1 \neq 1$$

Il n'existe donc pas de réels a et b tels que $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{AD}$.

Autrement dit, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires et forment donc une base de l'espace.