

DÉRIVATION

I Rappels

1° Nombre dérivé & tangente à une courbe

Définition : soient f une fonction définie sur un intervalle I , $a \in I$ et C_f la courbe représentative de f .

Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est un nombre réel, on dit que f est dérivable en a .

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a : on note $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Propriété : L'équation de la tangente T_a à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Elle passe par le point $A(a; f(a))$.

$\Rightarrow f'(a)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse a

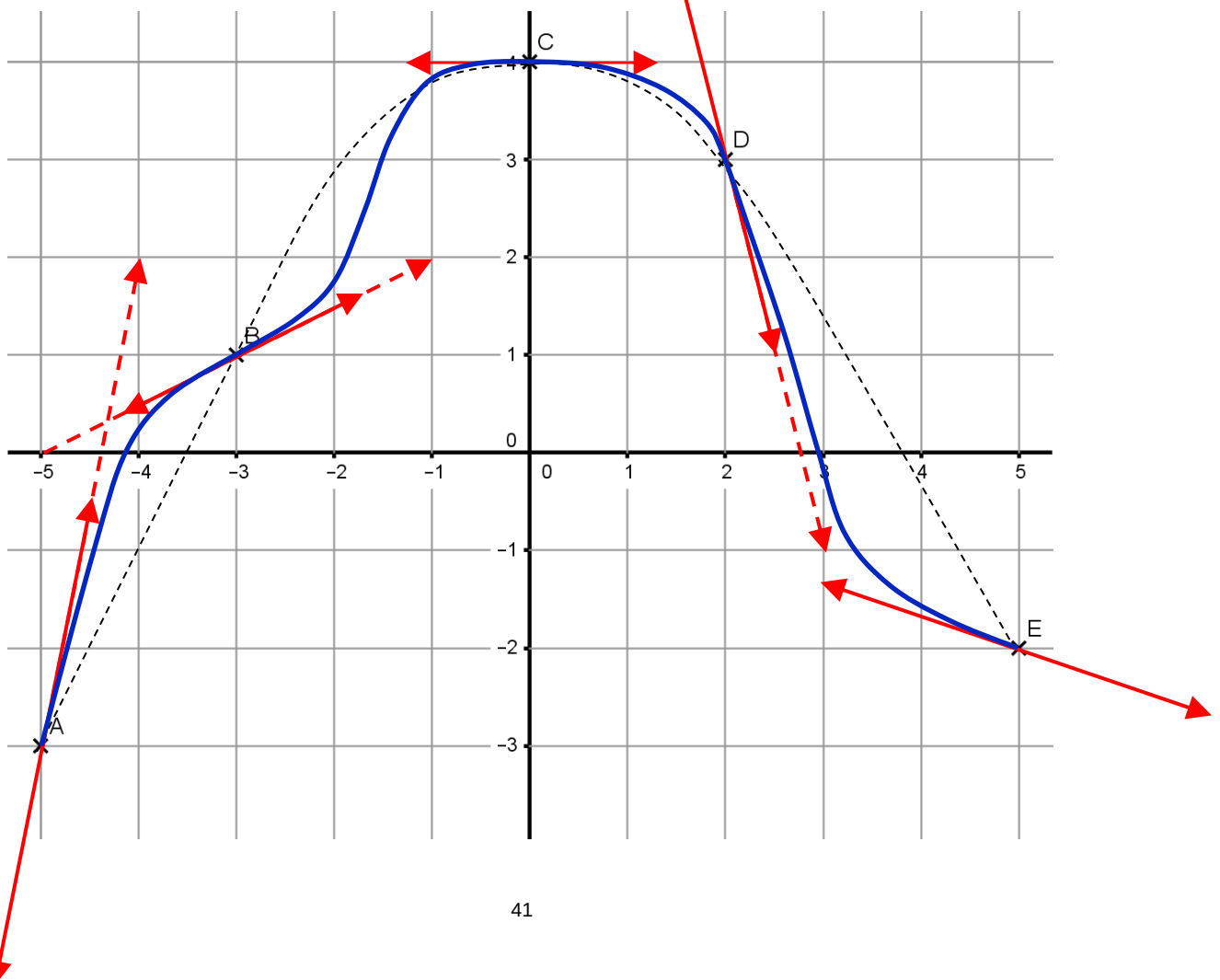
Et par conséquent : $f'(a) = 0 \Leftrightarrow$ Tangente horizontale au point d'abscisse a

Représentation graphique :

Le positionnement des tangentes permet de préciser l'allure graphique d'une courbe représentative.

Ex : f est définie sur $[-5; 5]$, croissante sur $[-5; 0]$, décroissante sur $[0; 5]$, passe par A, B, C, D, E.

$$f'(-5) = 5 \quad f'(-3) = 0,5 \quad f'(0) = 0 \quad f'(2) = -4 \quad f'(5) = -\frac{1}{3}$$



2° Formules usuelles

Fonction	f	Dérivable sur	f'
Affine	$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Puissance pour $n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Racine	$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty [$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Exponentielle	$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Somme	$(u + v)' = u' + v'$	
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$	<u>Cas particuliers :</u> $(ku)' = ku', k \in \mathbb{R}$ $(u^2)' = 2u'u$
Quotient (sur un intervalle où le dénominateur ne s'annule pas)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	<u>Cas particuliers :</u> $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$

Ex : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$P(x) = 3x^3 - 15x^2 + 25x - 9$$

$$Q(x) = (4x - 1)^2$$

$$P'(x) = 3 \times 3x^2 - 15 \times 2x + 25$$

$$Q'(x) = 2(4x - 1) \times 4$$

$$= 9x^2 - 30x + 25$$

$$= 8(4x - 1)$$

$$= (3x - 5)^2$$

$$R(x) = \frac{4}{3 - 2x} = 4 \times \frac{1}{3 - 2x}$$

$$S(x) = \frac{5x - 3}{2x + 7}$$

$$R'(x) = 4 \times \frac{-(-2)}{(3 - 2x)^2}$$

$$S'(x) = \frac{5(2x + 7) - (5x - 3) \times 2}{(2x + 7)^2}$$

$$= \frac{8}{(3 - 2x)^2}$$

$$= \frac{10x + 35 - 10x + 6}{(2x + 7)^2}$$

$$= \frac{41}{(2x + 7)^2}$$

3° Sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$

f est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

Ex : Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x - 5$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 + \frac{3}{2} \times 2x - 2$$

$$= 2x^2 + 3x - 2$$

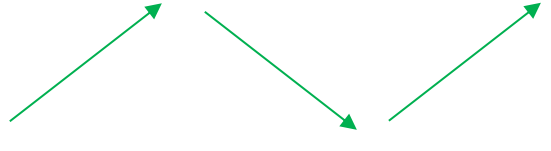
$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2)$$

$$= 9 + 16 = 25$$

$$x_1 = \frac{-3-5}{2 \times 2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+5}{2 \times 2}$$

$$= -2$$

$$= \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

II Dérivée d'une fonction composée

1° Cas général

Rappel : on a déjà vu que $f(x) = \sqrt{5x+3}$ est l'enchaînement de la fonction affine $u(x) = 5x+3$ et de la fonction racine carrée $v(x) = \sqrt{x}$. En effet, $f(x) = \sqrt{u(x)} = v(u(x))$

On note $f(x) = v \circ u(x)$, ce qui se lit « v rond u de x ».

Propriété : (admis)

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J . Et soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle K tel que $J \subset K$.

La fonction $f = v \circ u$ est dérivable sur l'intervalle I et on a $f' = (v' \circ u) \times u'$

On utilisait en fait déjà cette façon de dériver :

$$\hookrightarrow u^2 = v \circ u \text{ où } v(x) = x^2.$$

$$\text{On a } v'(x) = 2x \text{ donc } v' \circ u(x) = 2u(x).$$

$$\text{D'où } (u^2)' = 2u \times u' = 2u'u$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{u} = v \circ u \text{ où } v(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{On a } v'(x) = \frac{-1}{x^2} \text{ donc } v' \circ u(x) = \frac{-1}{(u(x))^2}$$

$$\text{D'où } \left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-1}{u^2} \times u' = \frac{-u'}{u^2}$$

2° Dérivée de la fonction $\sqrt{u(x)}$

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

La fonction $\sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Preuve « à la main » en fin de chapitre...



$\sqrt{u(x)}$ existe si $u(x) \geq 0$ et $\sqrt{u(x)}$ est dérivable si $u(x) > 0$. Autrement dit, une racine est définie si son contenu est positif et dérivable si son contenu est strictement positif.

Ex 1 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x^2 + 11x - 21}$

1° a. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?

b. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?

2° Déterminer le sens de variation de f sur D_f .

1° a. f est définie si $2x^2 + 11x - 21 \geq 0$

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times (-21)$$

$$= 121 + 168 = 289$$

$$\text{D'où } x_1 = \frac{-11 + 17}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-11 - 17}{4}$$

$$= \frac{3}{2} \quad \quad \quad = -7$$

x	$-\infty$	-7	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x^2 + 11x - 21$		+	-	+

On en déduit que f est définie sur $D_f =]-\infty; -7] \cup [\frac{3}{2}; +\infty[$

b. f est dérivable si $2x^2 + 11x - 21 > 0$, c'est à dire si $x \in]-\infty; -7[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$

2° Si on pose $u(x) = 2x^2 + 11x - 21$, on a alors $u'(x) = 4x + 11$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4x + 11}{2\sqrt{2x^2 + 11x - 21}}$$

f' est donc du signe de $4x + 11$ car $2\sqrt{2x^2 + 11x - 21} > 0$

$$4x + 11 = 0$$

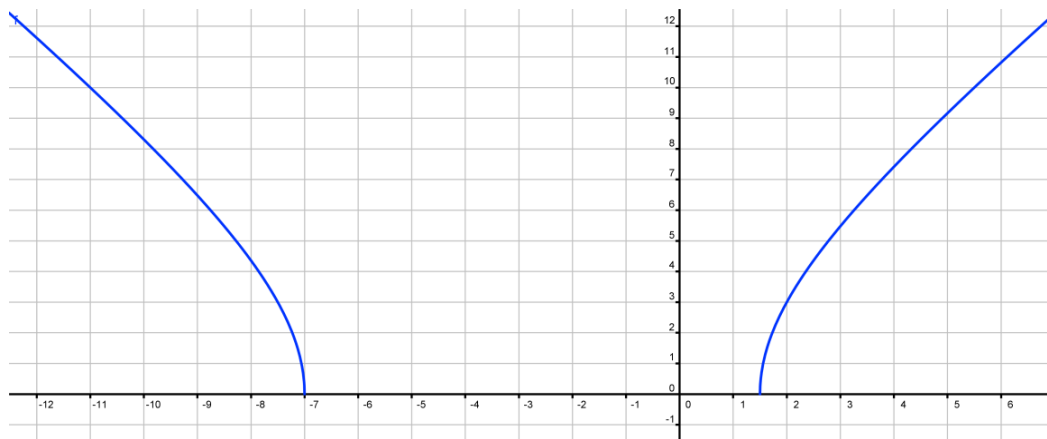
$$4x = -11$$

$$x = -\frac{11}{4}$$

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-7	$-\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-				+
$f(x)$					

Remarque : graphiquement, on a :



Ex 2 : on considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\frac{4x-4}{x-3}}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$

1° Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$

2° Etudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$ et en déduire les équations des asymptotes à $\mathcal{C}_f$

3° Etudier la dérivabilité de f puis ses variations.

4° Tracer $\mathcal{C}_f$ et ses asymptotes.

1° f est définie si $\frac{4x-4}{x-3} \geq 0$

$$4x - 4 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$4x = 4$$

$$x = 3$$

$$x = \frac{4}{4} = 1$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$4x - 4$	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	0	+
$\frac{4x - 4}{x - 3}$	+	0	-	+

Donc $\mathcal{D}_f =]-\infty ; 1] \cup]3 ; +\infty[$

2° Commençons par les limites en $\pm\infty$:

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-4}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x} = 4$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sqrt{4} = 2 \text{ et de même } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

On observe donc des asymptotes horizontales en $+\infty$ et $-\infty$, d'équations $y = 2$.

Pour la limite quand $x \rightarrow 3, x > 3$:

$$\text{On a } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 4x - 4 = 8 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x - 3 = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} \frac{4x-4}{x-3} = +\infty$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty :$$

On observe donc une asymptote verticale d'équation $x = 3$.

3° f est dérivable si $\frac{4x-4}{x-3} > 0$, c'est à dire lorsque $x \in]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$

Posons $u(x) = \frac{4x-4}{x-3}$

$$u'(x) = \frac{4(x-3) - (4x-4)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{4x-12-4x+4}{(x-3)^2}$$

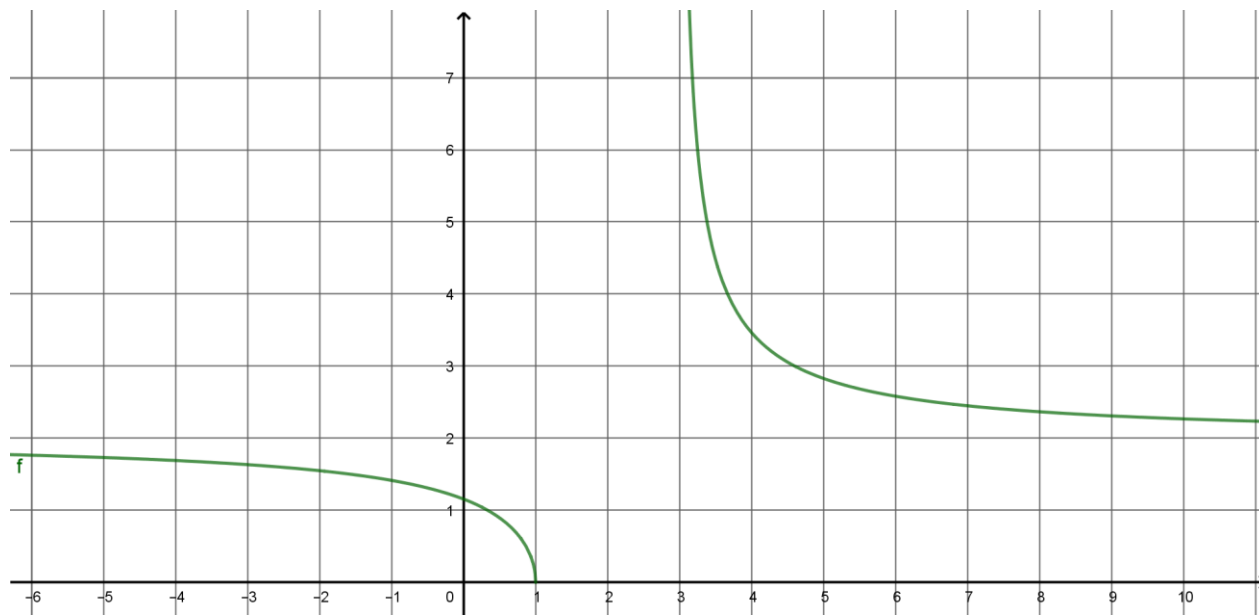
$$= \frac{-8}{(x-3)^2}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{-8}{\frac{(x-3)^2}{2\sqrt{\frac{4x-4}{x-3}}}} = \frac{-8}{(x-3)^2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-3}{4x-4}}$$

$$= \frac{-4}{(x-3)^2} \times \sqrt{\frac{x-3}{4x-4}}$$

f' est négative donc f est décroissante sur $] -\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$.

4° On obtient le graphique suivant :



3° Dérivée de la fonction $(u(x))^n$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit u une fonction dérivable sur un intervalle I , ne s'annulant pas sur I lorsque $n < 0$.

La fonction $(u(x))^n$ est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

Preuve « à la main » en fin de chapitre...

Ex : Déterminer le sens de variation de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x^2 + 7x + 15)^3$

On pose $u(x) = -2x^2 + 7x + 15$. On a alors $u'(x) = -4x + 7$.

$$f'(x) = (-4x + 7)(-2x^2 + 7x + 15)^2$$

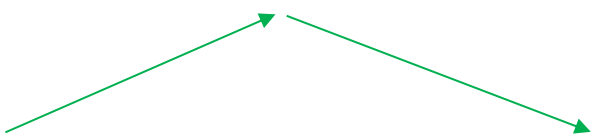
f' est donc du signe de $-4x + 7$ car $(-2x^2 + 7x + 15)^2 \geq 0$

$$-4x + 7 = 0$$

$$7 = 4x$$

$$x = \frac{7}{4} = 1,75$$

D'où le tableau de variations :

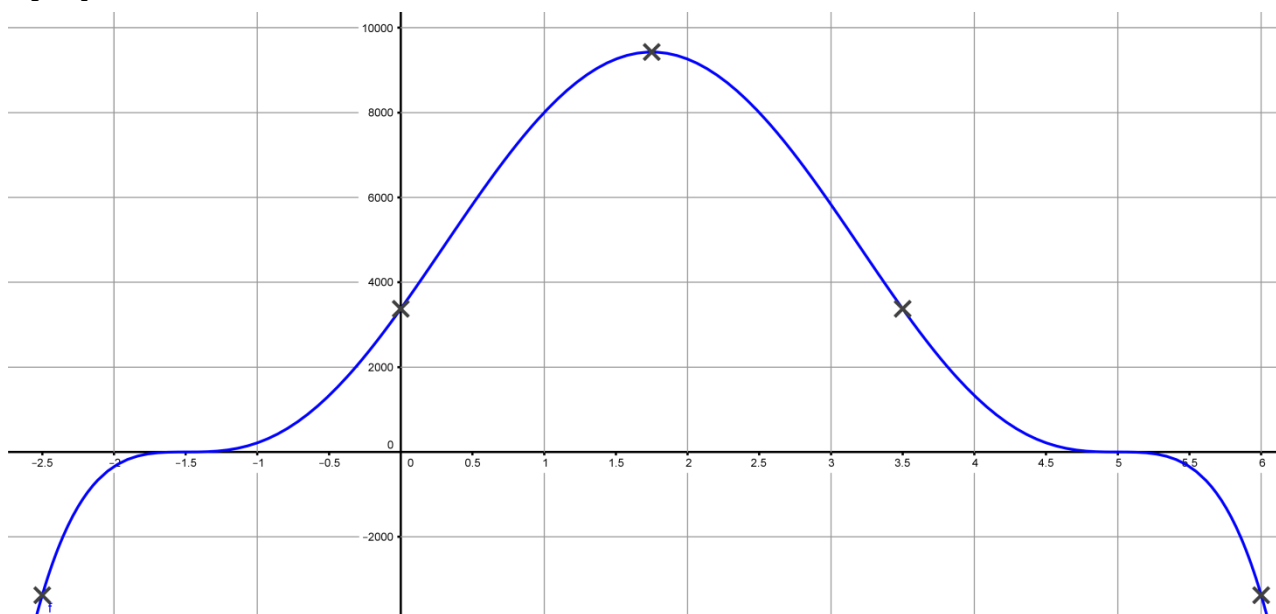
x	$-\infty$	$-1,5$	$1,75$	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0
$f(x)$						

Remarque : on peut préciser que la dérivée s'annule également lorsque $-2x^2 + 7x + 15 = 0$, c'est-à-dire lorsque $x = -1,5$ et $x = 5$.

On observe donc des **tangentes horizontales en $-1,5$ et en 5** .

Par ailleurs, lorsque $x = -1,5$ et $x = 5$, on peut également remarquer que $f(x) = 0$.

Graphiquement, cela donne : (oui, j'ai généreusement indiqué quelques points par lesquels la fonction passe...)



4° Fonctions $e^{u(x)}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = e^u \times u' = u'e^u$

Ex : Déterminer la dérivée des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{4x+3}$ et $g(x) = -7e^{2-3x}$

$$f'(x) = 5 \times 4e^{4x+3} = 20e^{4x+3}$$

$$g'(x) = -7 \times (-3)e^{2-3x} = 21e^{2-3x}$$

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{\frac{-x}{2}}$

1° a. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Que peut-on en déduire concernant la représentation graphique de f ?

2° Dresser le tableau de variations de f .

3° Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

4° Tracer la courbe représentative de f .

1° a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{-x}{2}} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Par ailleurs, $f(x) = x e^{\frac{-x}{2}} = -2 \left(\frac{-x}{2} \right) e^{\frac{-x}{2}} = -2X e^X$ en posant $X = \frac{-x}{2}$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} -2X e^X = 0$ par croissances comparées.

b. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

$$\begin{aligned} 2^\circ f'(x) &= 1 \times e^{\frac{-x}{2}} + x \times \left(\frac{-1}{2} \right) \times e^{\frac{-x}{2}} & u &= x & v &= e^{\frac{-x}{2}} \\ &= e^{\frac{-x}{2}} \left(1 - \frac{x}{2} \right) & u' &= 1 & v' &= e^{\frac{-x}{2}} \times \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$ car $e^{\frac{-x}{2}} > 0$

$$1 - \frac{x}{2} > 0$$

$$1 > \frac{x}{2}$$

$$2 > x$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{e}$	0

$$f(2) = 2e^{\frac{-2}{2}}$$

$$= 2e^{-1}$$

$$= \frac{2}{e}$$

$$3^\circ f'(0) = e^{\frac{-0}{2}} \left(1 - \frac{0}{2} \right) \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \times e^{\frac{-0}{2}}$$

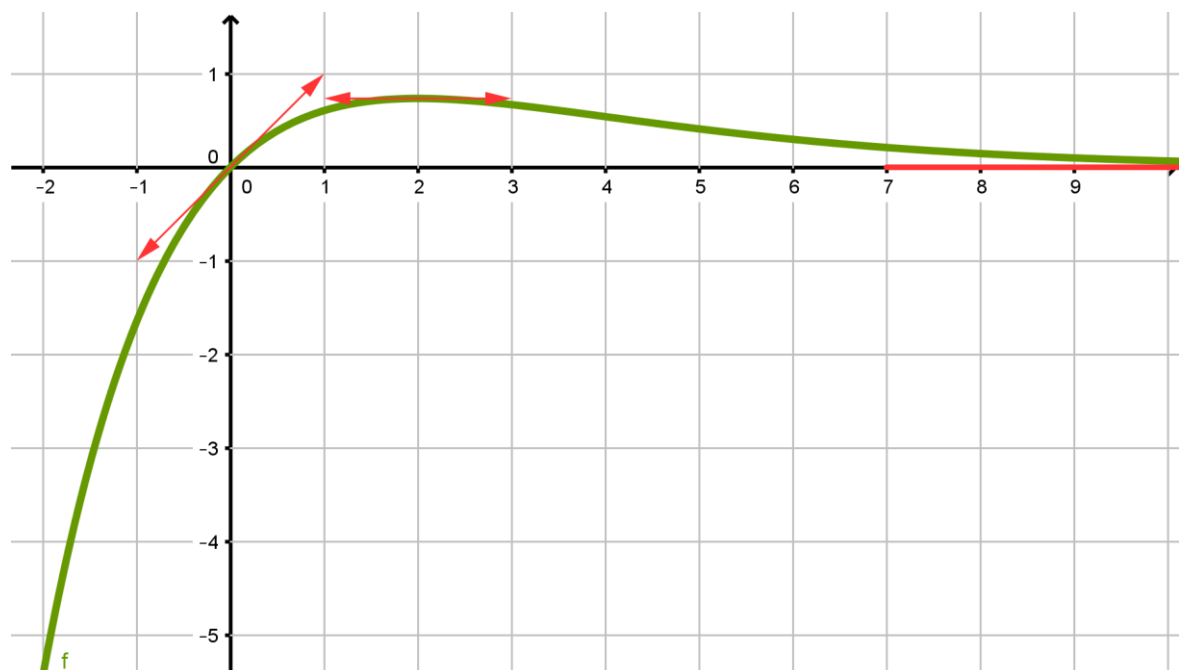
$$= 1 \times 1 = 1$$

$$= 0$$

D'où $y = 1 \times x + 0$

$$= x$$

4° On obtient la courbe suivante :



III Application aux suites

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n e^{-u_n}$.
On souhaite déterminer son sens de variations...

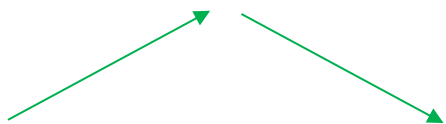
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2u_n e^{-u_n} - u_n \\ &= u_n(2e^{-u_n} - 1) \end{aligned}$$

Et là, l'étude de signe se corse...

Il existe une autre manière de procéder : on considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = 2xe^{-x}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= 2e^{-x} + (-e^{-x} \times 2x) \\ &= 2e^{-x}(1 - x) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

2. a. Initialisation : $n = 0$

$$u_0 = 0,1 \text{ et } u_1 = 2 \times 0,1 e^{-0,1} \approx 0,18 \text{ donc } 0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$$

Hérédité : supposons que $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ pour un certain rang n .

Montrons que $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$.

On a $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ par HR.

$$f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1) \text{ car } f \text{ est strictement croissante sur } [0 ; 1].$$

$$0 \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq 2e^{-1} \leq 1$$

Par récurrence, on a $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1, \forall n \geq 0$.

- b. (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge.

Remarques : 1. Plus généralement, si une suite est définie par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et que

f est croissante, alors si $u_1 - u_0 \geq 0$, (u_n) est croissante et si $u_1 - u_0 \leq 0$, (u_n)

est décroissante. Et si f est décroissante, c'est le b... (il y a des vérifications à faire pour que la suite soit définie, mais l'énoncé les donne...)

2. Pour le calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, il faut résoudre $\ell = 2\ell e^{-\ell}$. On le justifiera (mieux) dans le chapitre 9 et on verra comment résoudre cette équation dans le chapitre 13.