

I Limites et comparaison

Théorème de comparaison : Soient (u_n) et (v_n) deux suites et n_0 un entier naturel.

Si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (th. de minoration)

Si pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (th. de majoration)

A Preuve : Soit $A > 0$.

U $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ donc $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow v_n \geq A$

P Par ailleurs, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq v_n$.

R Ainsi, dès que $n \geq \text{Max}(n_0, p)$ alors $u_n \geq v_n \geq A$.

O Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

G

R

A

M

M

E

Ex : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = n + \sin n$

On sait que $-1 \leq \sin n \leq 1$

$$-1 + n \leq \sin n + n \leq 1 + n$$

$$-1 + n \leq u_n \leq 1 + n$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ d'après le théorème de minoration.

Théorème des gendarmes : Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites, n_0 un entier naturel.

On suppose que pour tout $n \geq n_0$, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Ex : Déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

On sait que $(-1)^n$ vaut successivement -1 et 1 . On peut donc dire que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\text{D'où } \frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Remarque : Th des gendarmes $\Rightarrow$ limite finie et Th de comparaison $\Rightarrow$ limite infinie

II Majoration et minoration

Définition : On dit que la suite (u_n) est **majorée par M** si pour tout n , $u_n \leq M$.

On dit que la suite (u_n) est **minorée par m** si pour tout n , $u_n \geq m$.

Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Ex 1 : Montrer que la suite définie par $u_n = \frac{3n+2}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est bornée.

Tout d'abord, $u_n \geq 0$ car $n \geq 0$.

Par ailleurs, la calculatrice permet de conjecturer que les valeurs de u_n ne dépassent pas 3.

Pour montrer que $u_n < 3$, on va en fait montrer que $3 - u_n > 0$

$$\begin{aligned} 3 - u_n &= 3 - \frac{3n+2}{n+1} \\ &= \frac{3(n+1) - (3n+2)}{n+1} \\ &= \frac{3n+3-3n-2}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $3 - u_n > 0$ car $n \geq 0$, c'est-à-dire $u_n < 3$.

Ainsi, on a $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n : la suite est bien bornée !

Ex 2 : Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$ est bornée.

La calculatrice permet de conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$. Prouvons-le :

Initialisation : $n = 0$

$u_0 = 1 \leq 2$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que $u_n \leq 2$ pour un certain rang n .

Montrons que $u_{n+1} \leq 2$ c'est-à-dire que $\sqrt{2+u_n} \leq 2$

On a $u_n \leq 2$ par HR

$$u_n + 2 \leq 4$$

$$\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante}$$

$$u_{n+1} \leq 2$$

Par récurrence, on a donc $u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$

Par ailleurs, pour tout n , $u_n \geq 0$: on a donc $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$

Propriété : Si une suite est croissante et converge vers un nombre réel ℓ , alors elle est majorée par ℓ .

Preuve : se fait par l'absurde (admis)

Théorème de convergence monotone : *admis*

Toute suite **croissante et majorée** converge.

Toute suite **décroissante et minorée** converge.



Ce théorème ne permet pas **de déterminer la limite de u_n** : il permet « seulement » **d'affirmer que la suite u_n converge vers une certaine limite...**

Par exemple, une suite croissante et majorée par 5 converge, mais **sa limite n'est pas nécessairement 5** (on peut seulement dire qu'elle est inférieure à 5)

A Corollaire : Une suite croissante et non majorée **tend vers $+\infty$**
U

P Preuve : Soit $A > 0$.
R

O Si (u_n) n'est pas majorée alors **il existe notamment un entier p tel que $u_p > A$.**
G

R Or, (u_n) est croissante donc **pour tout $n \geq p$, on a $u_n \geq u_p > A$**
A

M Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
M
E

Exercice : La suite (u_n) est définie pour tout n par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

1° Montrer que cette suite est majorée par 3.

2° Montrer que cette suite est croissante. Que peut-on en déduire ?

3° Déterminer la limite de cette suite. ➔ **méthode**

1° **Initialisation** : $n = 0$

$u_0 = -3 \leq 3$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que $u_n \leq 3$ pour un certain rang n .

Montrons que $u_{n+1} \leq 3$

On a $u_n \leq 3$ par HR

$$\frac{2}{3}u_n \leq 2$$

$$\frac{2}{3}u_n + 1 \leq 3$$

$$u_{n+1} \leq 3$$

Par récurrence, on a donc $u_n \leq 3$ pour tout $n \geq 0$.

$$\begin{aligned} 2^\circ u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n \\ &= 1 - \frac{1}{3}u_n \end{aligned}$$

$$\text{Or, } u_n \leq 3 \text{ d'après } 1^\circ \text{ donc } -\frac{1}{3}u_n \geq -1$$

$$1 - \frac{1}{3}u_n \geq 0$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

Autre méthode : **réurrence !**

Donc (u_n) est croissante. Et **puisque'elle est majorée par 3, elle converge.**

3° Notons ℓ la limite de la suite (u_n) . Par **unicité de la limite**, on a :

$$\ell = \frac{2}{3}\ell + 1$$

$$\ell - \frac{2}{3}\ell = 1$$

$$\frac{1}{3}\ell = 1 \text{ et donc } \ell = 3$$

M
É
T
H
O
D
E

III Cas des suites géométriques

Propriété : Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$ (*suite constante*)

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Si $q \leq -1$, alors q^n n'a pas de limite (*suite divergente*)

A Preuve : pour $q > 1$

U Prérequis : on a vu précédemment que $(1 + a)^n \geq 1 + na$ si $a \geq -1$ (inégalité de Bernoulli)

P Puisque $q > 1$, on peut poser $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

R Dès lors, $q^n \geq 1 + na$ d'après Bernoulli.

O Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ car $a > 0$.

G Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

R

A

M

M

E

Ex : déterminer la limite de la suite définie par $u_n = \frac{3 - 2^n}{5^n - 4}$

$$\text{On a } u_n = \frac{2^n \left(\frac{3}{2^n} - 1 \right)}{5^n \left(1 - \frac{4}{5^n} \right)} = \left(\frac{2}{5} \right)^n \times \frac{\frac{3}{2^n} - 1}{1 - \frac{4}{5^n}}$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \times \frac{0 - 1}{1 - 0} = 0 \left(\text{car } -1 < \frac{2}{5} < 1 \right)$$

Ex : La renouée du Japon est une plante à croissance rapide, très invasive. Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1^{er} janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente.

Malheureusement, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2 .

On note u_n la superficie de terrain en m^2 envahi au 1^{er} janvier de l'année $2017 + n$.

1. Déterminer une relation entre u_n et u_{n+1} .
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 40$ pour tout entier naturel n .
 - a. Démontrer que (v_n) est géométrique et donner l'expression explicite de v_n .
 - b. En déduire le sens de variations et l'expression explicite de u_n .
3. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier.

1. La réduction de 10% se traduit en effet par une multiplication par 0,9 et la repousse de 4 m^2 qui survient plus tard par l'addition du 4.

D'où $u_{n+1} = 0,9u_n + 4$.

2. a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 40$

$$= 0,9u_n + 4 - 40$$

$$= 0,9(v_n + 40) - 36$$

$$= 0,9v_n + 36 - 36$$

$$= 0,9v_n$$

(v_n) est donc géométrique de raison 0,9.

$$v_0 = u_0 - 40$$

$$= 120 - 40$$

$$= 80$$

D'où $v_n = 80 \times 0,9^n$

b. (v_n) est décroissante car sa raison est $0 < 0,9 < 1$ et son premier terme est positif.

Or, $u_n = v_n + 40$ donc (u_n) est également décroissante.

De plus $u_n = v_n + 40$

$$= 80 \times 0,9^n + 40$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 80 \times 0,9^n + 40 = 40$ car $-1 < 0,9 < 1$

(u_n) est décroissante et tend vers 40 : la plante invasive ne disparaîtra jamais complètement du terrain. Sa surface s'approchera en effet de 40 m^2 .