

LIMITES

1^{ère} partie

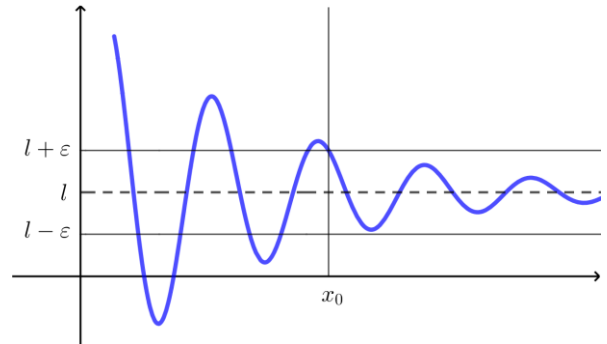
I Limite d'une fonction lorsque x tend vers $\pm\infty$

⇒ On donnera les définitions quand x tend vers $+\infty$: elles sont analogues en $-\infty$.

1° Limite finie

Le graphique ci-contre illustre une fonction f pour laquelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Cela signifie que les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de ℓ dès lors que les valeurs de x sont très très grandes.



Plus précisément, cela signifie que **quelle que soit la**

précision souhaitée, on peut toujours trouver une valeur de x à partir de laquelle l'écart entre

$f(x)$ et ℓ est plus petit que la précision souhaitée.

Plus formellement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ peut se traduire de la manière suivante :

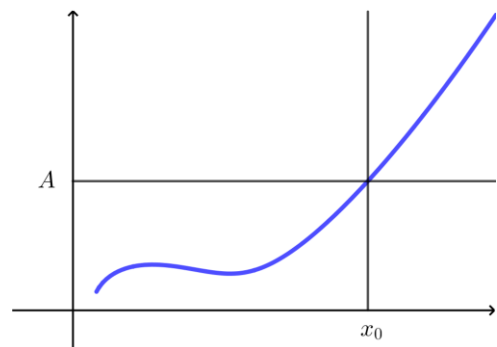
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Définition : La droite d'équation $y = \ell$ est appelée **asymptote horizontale**.

2° Limite infinie

Le graphique ci-contre illustre une fonction f pour laquelle $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Cela signifie que les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut dès lors que les valeurs de x sont très très grandes.



Plus précisément, cela signifie que **quel que soit le**

seuil souhaité, on peut toujours trouver une valeur de x à partir de laquelle les valeurs de $f(x)$

sont plus grandes que ce seuil.

Plus formellement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ peut se traduire de la manière suivante :

$$\forall A > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq x_0 \Rightarrow f(x) > A$$

Remarque : des notations « allégées » existent : $\lim_{+\infty} f = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = +\infty$.



Une fonction ne possède pas forcément de limite en $+\infty$. (cf sinusoïde)

3° Limites de référence

Les limites suivantes sont considérées comme connues (limites de référence) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Plus généralement, pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ et

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty & \text{si } k \text{ est pair} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

II Limite d'une fonction lorsque x tend vers un réel a

Soit a un réel quelconque.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut dès lors que les

valeurs de x sont suffisamment proches de a .

Plus formellement, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ peut se traduire de la manière suivante :

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

On distinguera éventuellement deux cas :

$\Rightarrow$ la limite à gauche : x tend vers a en étant plus petit que a

On note $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (ou en version allégée : $\lim_{a^-} f$)

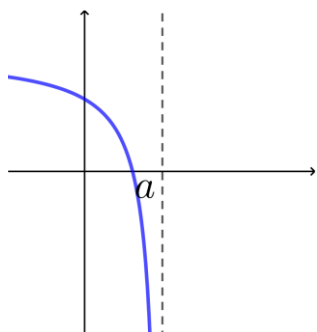
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < a - x < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

$\Rightarrow$ la limite à droite : x tend vers a en étant plus grand que a

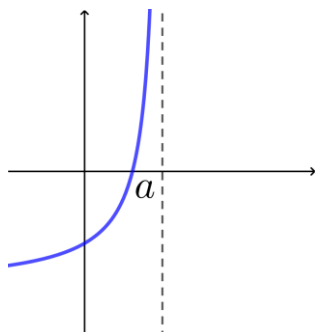
On note $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ (ou en version allégée : $\lim_{a^+} f$)

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > A$$

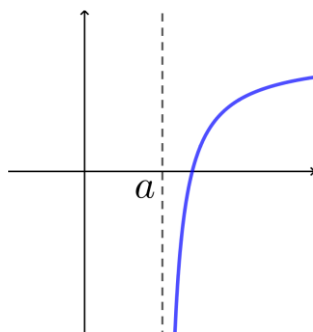
Graphiquement, cela se traduit par les situations suivantes :



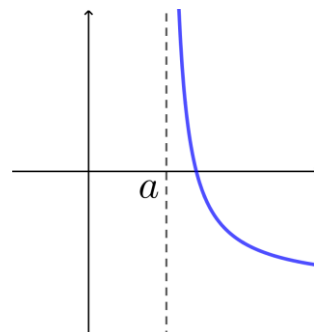
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

La droite d'équation $x = a$ est appelée **asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$** au voisinage de a (on peut préciser « vers $+\infty$ » ou « vers $-\infty$ »)

Résumons ces histoires d'asymptotes horizontales et verticales :

On a une asymptote horizontale lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et $f(x) \rightarrow a$. Son équation est $y = a$.

On a une asymptote verticale lorsque $x \rightarrow a$ et $f(x) \rightarrow \pm\infty$. Son équation est $x = a$.

III Calculer des limites

1° Opérations sur les limites

Les résultats vus pour les limites de suites se retrouvent avec les limites de fonctions, qu'il s'agisse de limite en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a .

Limite d'une somme :

$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \dots} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit :

$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow \dots} g(x)$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Limite d'un quotient :

$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	± 0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow \dots} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	± 0	$\ell' \neq 0$	± 0	± 0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow \dots} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	FI

Pour indiquer qu'une limite vaut zéro et que ce zéro est positif ou négatif, on utilisera la notation :

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0^- \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = 0^+$$

Ex : $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} 2x - 8 = 0^-$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} 12 - 3x = 0^+$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 4x + 8 = 0^-$

Ex 1 : Déterminer la limite en 5 de la fonction h définie par $h(x) = \frac{4-3x}{x-5}$

Brouillon : Limite du type $\frac{-11}{0} \Rightarrow 0^+ \text{ ou } 0^- ?$

On a $\lim_{x \rightarrow 5} 4 - 3x = 4 - 3 \times 5 = -11$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} x - 5 = 0^-$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x) = +\infty$ par quotient.

Et $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} x - 5 = 0^+$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x) = -\infty$ par quotient.

💡 On observe une asymptote verticale d'équation $x = 5$.

Ex 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^2 - x - 6}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$
Déterminer les limites de f en -2 et en 3 .

Brouillon : En -2 on a une limite du type $\frac{-4}{0} \Rightarrow 0^+ \text{ ou } 0^- ?$

On a $\lim_{x \rightarrow -2} 2x^2 - 12 = 2 \times (-2)^2 - 12 = -4$

On pourrait vérifier que -2 et 3 sont les racines du trinôme au dénominateur.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x^2 - x - 6$	+	-	+	+

D'où $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x^2 - x - 6 = 0^+$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ par quotient.

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 - x - 6 = 0^-$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$ par quotient.

💡 On observe une asymptote verticale d'équation $x = -2$

Brouillon : En 3 on a une limite du type $\frac{6}{0} \Rightarrow 0^+ \text{ ou } 0^- ?$

On a $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 12 = 2 \times 3^2 - 12 = 6$

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} x^2 - x - 6 = 0^-$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} f(x) = +\infty$ par quotient.

De même, $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} x^2 - x - 6 = 0^+$ et donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} f(x) = -\infty$ par quotient.

💡 On observe une asymptote verticale d'équation $x = 3$

On pourrait montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ en factorisant par le plus fort.

💡 On observe une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Graphiquement, on peut conjecturer de l'allure de la courbe représentative de la fonction f :

1. Allure au niveau des asymptotes :
2. Valeurs particulières pour affiner le tracé :

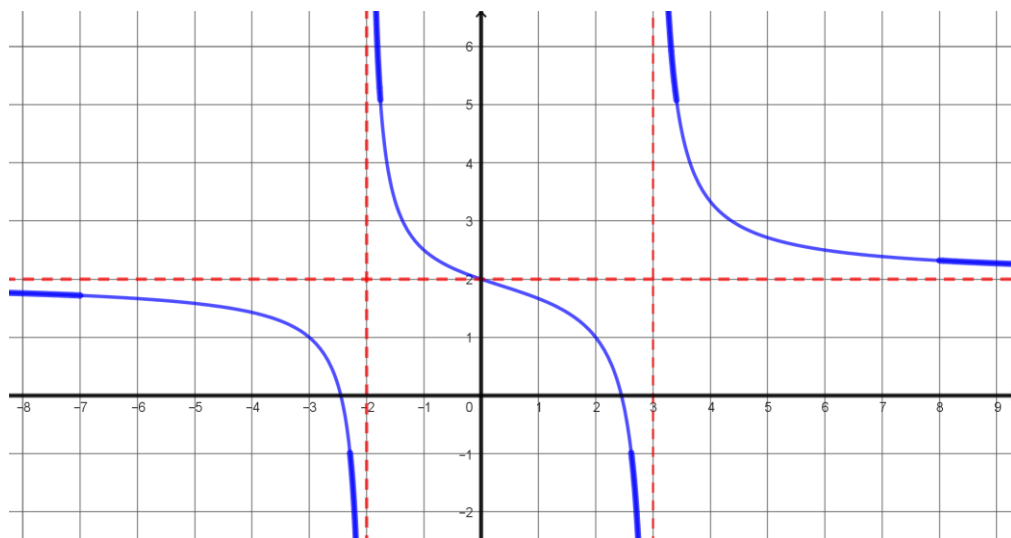
$$f(-3) = 1$$

$$f(-1) = 2,5$$

$$f(0) = 2$$

$$f(2) = 1$$

$$f(4) \approx 3,3$$



2° Lever les indéterminées

Pour les limites lorsque x tend vers $\pm\infty$, la factorisation par « le plus fort » donne généralement de bons résultats mais nous allons énoncer certains résultats permettant de gagner du temps dans certains cas particuliers.

Fonctions polynômes : fonctions de la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que cette fonction polynôme est de **degré n** .

Un polynôme de degré 2 est **une fonction trinôme**, une fonction polynôme de degré 1 est **une fonction affine** et une fonction polynôme de degré 0 est **une fonction constante**.

Propriété : Lorsque x tend vers $\pm\infty$, une fonction polynôme a la même limite que **son monôme de plus haut degré**.

Preuve : Soit P une fonction polynôme définie par $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a } P(x) &= x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + a_1 \frac{x^1}{x^n} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \\ &= x^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} = a_n$$

$$\text{Et par produit, } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

Ex : Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = -5x^3 + 4x^2 + x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 = +\infty$$

Fonctions rationnelles : il s'agit des fonctions se présentant sous la forme d'un quotient de fonctions polynômes.

Propriété : Lorsque x tend vers $\pm\infty$, une fonction rationnelle a la même limite que le quotient de ses monômes de plus haut degré.

Ex 1 : Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{4x^2 - 5x - 9}{3 - 2x - 8x^2 + 7x^3}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2}{7x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{7x} = 0$$

Ex 2 : Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{2 - 5x - 6x^2}{3x - 5}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x = +\infty$$

Ex 3 : Déterminer la limite en -2 de la fonction h définie par $h(x) = \frac{-3x^2 - 5x + 2}{x + 2}$



Brouillon : On a une FI du type $\frac{0}{0} \Rightarrow$ pour ce type de FI, il faut simplifier la fonction rationnelle et donc commencer par factoriser (pas par le plus fort)

$$\begin{aligned}\Delta &= (-5)^2 - 4 \times (-3) \times 2 \\ &= 25 + 24 \\ &= 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{On a donc } x_1 &= \frac{5 - 7}{2 \times (-3)} \text{ et } x_2 = \frac{5 + 7}{2 \times (-3)} \\ &= \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \quad \quad \quad = \frac{12}{-6} = -2\end{aligned}$$

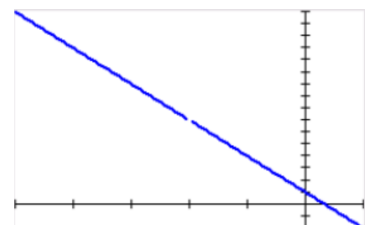
$$\begin{aligned}\text{D'où } -3x^2 - 5x + 2 &= -3 \left(x - \frac{1}{3} \right) (x + 2) \\ &= (-3x + 1)(x + 2)\end{aligned}$$

$$\text{On a alors } h(x) = \frac{(-3x + 1)(x + 2)}{x + 2} = -3x + 1$$

$$\text{Donc, } \lim_{x \rightarrow -2} h(x) = -3 \times (-2) + 1 = 7$$

$\Rightarrow$ Dans cet exemple, -2 est finalement une « fausse valeur interdite » : il n'y a pas d'asymptote verticale.

La représentation graphique a un « trou » au niveau de $x = -2$.



Racines carrées : Une technique classique consiste à utiliser « l'expression conjuguée ».

Ex : Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = 3x - \sqrt{9x^2 - 1}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(3x - \sqrt{9x^2 - 1})(3x + \sqrt{9x^2 - 1})}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \rightarrow \text{expression conjuguée} \\ &= \frac{9x^2 - (9x^2 - 1)}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \\ &= \frac{1}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 - 1} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + \sqrt{9x^2 - 1} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Pour la limite en $-\infty$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

3° Cas des fonctions composées

Certaines fonctions ne peuvent être écrites comme somme, produit ou quotient de fonctions usuelles : il s'agit de fonctions composées (enchaînement de deux fonctions)

Par exemple, $f(x) = \sqrt{5x + 3}$ est l'enchaînement de la fonction affine $u(x) = 5x + 3$ et de la fonction racine carrée $v(x) = \sqrt{x}$.

En effet, $f(x) = \sqrt{u(x)} = v(u(x))$

On note $f(x) = v \circ u(x)$. Cela se lit « v rond u de x »



$v \circ u \neq u \circ v$

Dans l'exemple précédent, $u \circ v(x) = u(v(x))$

$$= 5v(x) + 3$$

$$= 5\sqrt{x} + 3$$

Propriété : soient a, b et c des réels ou $\pm\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = c$.

Ex : Calculer la limite de $f(x) = \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}}$ lorsque x tend vers $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 9 + \frac{1}{x^2} = 9$ et $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} = 3$