

DÉNOMBREMENT

I Rappels

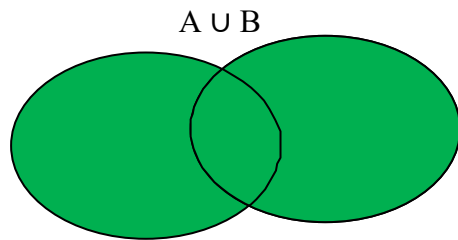
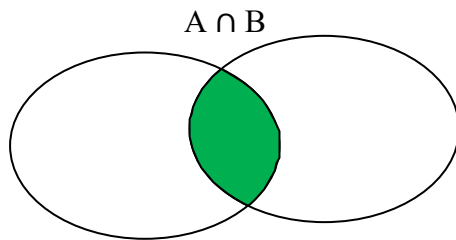
Définition : Soient A et B deux ensembles.

L'intersection de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et B. On la note $A \cap B$.

L'union de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou B. On la note $A \cup B$.

Attention : en français, le « ou » est généralement « *exclusif* ». Lorsqu'on a le choix « fromage ou dessert », c'est l'un ou l'autre : il n'est pas possible d'avoir les deux. Mais si $x \in (A \cup B)$ alors x peut appartenir à A et à B simultanément : ce n'est pas interdit ! Le « ou » de $A \cup B$ est donc « *inclusif* ».

Autrement dit, on a $(A \cap B) \subset (A \cup B)$



Ex 1 : une urne contient des boules blanches B_1, B_2, B_3, B_4 et des boules noires N_1, N_2, N_3, N_4 . On note B l'ensemble des boules blanches et P l'ensemble des boules portant un numéro pair.

$$B \cap P = \{B_2 ; B_4\} \quad \text{et} \quad B \cup P = \{B_1 ; B_2 ; B_3 ; B_4 ; N_2 ; N_4\}$$

Ex 2 : On note $A =]-\infty ; 5[$ et $B = [-3 ; 10[$

$$A \cap B = [-3 ; 5[\quad \text{et} \quad A \cup B =]-\infty ; 10[$$

Ex 3 : On note $Z =]-\infty ; -5[$ et $T = [3 ; 10[$

$$Z \cap T = \emptyset \quad \text{et} \quad Z \cup T \text{ n'est pas un intervalle (impossible à noter de manière « compactée »)}$$

Définition : Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$.

II Cardinal d'un ensemble fini

Définition : soit A un ensemble fini.

On appelle cardinal de A le nombre d'éléments de l'ensemble A. On le note $\text{Card}(A)$.

En particulier, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Ex : en TG1, il y a 35 élèves. On peut dire que $\text{Card}(\text{TG1}) = 35$.

1° Principe additif

Propriété : Soient A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

Cas particulier : si A et B sont disjoints, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

$\Rightarrow$ c'est ce qu'on appelle le « principe additif »

Remarque : ce principe se généralise de la manière suivante :

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$$

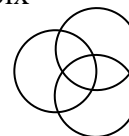


De manière pratique, un « ou » se traduit généralement par un « + »

Ex : la carte d'un restaurant propose 12 pizzas, 7 burgers et 10 galettes. Avec un ticket restaurant, on peut obtenir une pizza, un burger ou une galette.

Ces « ensembles » étant deux à deux disjoints, cela donne donc $12 + 7 + 10 = 29$ choix

Remarque : dans le cas d'ensembles non disjoints, on peut utiliser des diagrammes...



2° Principe multiplicatif

Définition : soient A et B deux ensembles non vides.

Le produit cartésien de A et B est l'ensemble des couples $(x ; y)$ où $x \in A$ et $y \in B$.

On le note $A \times B$ (lire « A croix B »)

Autrement dit, $A \times B = \{(x ; y), x \in A, y \in B\}$.

Remarques : 1. $A \times B = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.

2. Le produit cartésien de A par lui-même est noté A^2 .

Et plus généralement, le produit cartésien $A \times A \times \dots \times A$ se note A^n .

Ex : Posons $A = \{1 ; 2\}$ et $B = \{3 ; 4\}$.

$A \times B$ est composé des éléments $(1 ; 3), (1 ; 4), (2 ; 3)$ et $(2 ; 4)$.



$A \times B \neq B \times A$ si $A \neq B$ (notation non commutative)

Dans l'exemple précédent, $B \times A = \{(3 ; 1), (3 ; 2), (4 ; 1), (4 ; 2)\}$

Propriété : soient A et B deux ensembles finis.

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

$\Rightarrow$ C'est ce qu'on appelle le « principe multiplicatif ».

Remarque : ce principe se généralise à plus de deux ensembles.



De manière pratique, un « et » se traduit généralement par un « $\times$ »

Ex : la carte d'un restaurant propose 5 entrées et 8 plats. Combien de menus « entrée + plat » différents cette carte permet-elle de composer ?

Un menu est un couple $(e ; p)$ où $e \in E$ et $p \in P$.

Le nombre de menus est donc $\text{Card}(E \times P) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(P) = 5 \times 8 = 40$

Définition : soient A un ensemble non vide et n un entier naturel non nul.

On appelle n -uplet de A un élément de A^n .

Autrement dit, un n -uplet est une succession ordonnée de n éléments A qui peuvent éventuellement être répétés. Par exemple, un 2-uplet est un couple.

$\Rightarrow$ Un n -uplet peut être interprété comme un tirage successif de n boules avec remise, c'est-à-dire un tirage de n boules ordonnées et avec répétitions possibles

Ex : Un code de carte bancaire est une succession de quatre chiffres : c'est donc un 4-uplet de l'ensemble $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 ; 9\}$.

Un mot de cinq lettres est un 5-uplet de l'alphabet.

Propriété : soient A un ensemble non vide et k un entier naturel non nul.

$$\text{Card}(A^k) = (\text{Card}(A))^k$$

Autrement dit, le nombre de k -uplets d'un ensemble à n éléments est n^k

Ex : Il existe 10^4 codes possibles pour une carte bancaire et 26^5 mots différents de 5 lettres.

Récapitulons : la carte d'un restaurant propose 4 entrées, 7 plats et 5 desserts. La formule du jour permet de prendre « entrée + plat » ou « plat + dessert ». Combien de formules peut-on composer ?

$$4 \times 7 + 7 \times 5 = 28 + 35 = 63$$

III Arrangements et permutations

1° Factorielles

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n le nombre défini par :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Remarque : de manière similaire au symbole sigma utilisé pour les sommes, il existe une notation pour

les produits : $\prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$

Ex : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$$= 120$$

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$= 3\,628\,800$$



- Taper le nombre dont on veut calculer la factorielle
- Aller dans « math »
- Sélectionner le menu « PROB »
- Sélectionner l'option « 4 : ! »

⇒ très vite limité : on obtient par exemple $20! = 2,432\,902\,008 \times 10^{18}$ là où la valeur exacte est 2 432 902 008 176 640 000.

⇒ Par convention, $0! = 1$

Propriété : pour tout $n \geq 0$, on a $(n + 1)! = (n + 1)n!$

C'est entre autre pour cette raison qu'on a choisi $0! = 1$

Preuve : $(n + 1)! = (n + 1) \times \underbrace{n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}_{n!} = (n + 1)n!$

Ex : Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{73!}{71!}$$

$$= \frac{73 \times 72 \times 71!}{71!}$$

$$= 73 \times 72 = 5\,256$$

$$B = \frac{42!}{38!}$$

$$= \frac{42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38!}{38!}$$

$$= 42 \times 41 \times 40 \times 39 = 2\,686\,320$$

$$C = \frac{(n + 2)!}{n!}$$

$$= \frac{(n + 2)(n + 1)n!}{n!}$$

$$= (n + 2)(n + 1)$$

$$D = \frac{(n + 1)!}{(n - 1)!}$$

$$= \frac{(n + 1)n(n - 1)!}{(n - 1)!}$$

$$= n(n + 1)$$

Ex : écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles

$$E = 120 \times 119 \times 118 \times \dots \times 94 \times 93 \quad F = (n + 2)(n + 1)n(n - 1)(n - 2)$$

$$= \frac{120 \times 119 \times \dots \times 94 \times 93 \times 92!}{92!}$$

$$= \frac{120!}{92!}$$

$$= \frac{(n + 2)(n + 1)n(n - 1)(n - 2)(n - 3)!}{(n - 3)!}$$

$$= \frac{(n + 2)!}{(n - 3)!}$$

2° Arrangements

Définition : Soit A un ensemble fini non vide. On note $n = \text{Card}(A)$. Soit k un entier naturel, $k \leq n$.

Un k -arrangement de A est un k -uplet d'éléments **distincts** de A.

⇒ Un k -arrangement peut être interprété comme un tirage **successif** de k boules **sans remise**,
c'est-à-dire un tirage de k boules **ordonnées et toutes différentes**

Ex : Dans une course hippique, douze chevaux numérotés de 1 à 12 se présentent au départ.

Les triplets (4 ; 7 ; 2) et (7 ; 4 ; 2) sont **deux 3-arrangements différents**, mais le triplet (4 ; 7 ; 4) **n'est pas un 3-arrangement car il contient une répétition.**

Propriété : Soit A un ensemble fini non vide. On note $n = \text{Card}(A)$. Soit k un entier naturel, $k \leq n$.
Le nombre de k -arrangements de A est égal à :

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$$

Preuve : pour construire un k -arrangement, on a n choix pour le 1^{er} élément, puis $n-1$ pour le 2nd,
 $n-2$ pour le 3^{ème}, etc... Et pour le $k^{\text{ème}}$ élément, on a alors $n - (k-1) = n - k + 1$ choix.

Ex : Dans notre course hippique de 12 chevaux, le nombre de tiercés possibles est :

$$\mathcal{A}_{12}^3 = \frac{12!}{(12-3)!} = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$$

On a donc 1 chance sur 1 320 de trouver le tiercé (dans l'ordre) lorsque 12 chevaux sont au départ.



- Aller dans « math »
- Sélectionner le menu « PROB » en appuyant sur la flèche de droite
- Choisir « 2 : Arrangement »
- Taper ${}_5A_2$ pour obtenir $\mathcal{A}_5^2$

3° Permutations

Définition : Soit A un ensemble fini non vide. On note $n = \text{Card}(A)$.

Une permutation de A est un n -arrangement d'éléments de A .

Ex : Les permutations de $\{a; b; c\}$ sont $(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b)$ et $(c; b; a)$

Propriété : Le nombre de permutations d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$

Ex : Dans une course de 12 chevaux, il existe $12! = 479\,001\,600$ classements possibles.

IV Combinaisons

1° Définition

Définition : une partie de A est un sous-ensemble de A . L'ensemble des parties de A est noté $\mathcal{P}(A)$.

Ex : si $A = \{a; b; c\}$ alors $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}; A\}$

Propriété : soit A un ensemble fini à n éléments. Le nombre de parties de A est égal à 2^n .

Preuve : notons $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Soit B une partie de A .

On associe alors à B le n -uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$ constitué de 1 pour chaque a_i se trouvant dans B , et de 0 sinon.

Par exemple, si $B = \{a_1; a_4; a_{n-1}\}$, on lui associe le n -uplet $\{1; 0; 0; 1; 0; \dots; 0; 1; 0\}$.

Chaque partie B de A génère ainsi un **unique** n -uplets de $\{0 ; 1\}$, et **réciroquement**, chaque n -uplet de $\{0 ; 1\}$ donne **une unique partie de A**.

Autrement dit, le nombre de parties de A est égal au nombre **de n -uplets de $\{0 ; 1\}$** c'est-à-dire **2^n** .

$\Rightarrow$ Pour constituer une partie de A, il suffit de se demander pour chaque élément de A si on le prend ou non. Autrement dit, on a **deux choix** pour chacun des n éléments de A, ce qui donne bien **2^n** possibilités.

Définition : Soit A un ensemble fini non vide. On note $n = \text{Card}(A)$. Soit k un entier naturel, $k \leq n$.

Une combinaison de k éléments de A est **une partie de A de cardinal k** .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$. On le lit « k parmi n ».

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont également appelés **coefficients binomiaux**.

$\Rightarrow$ Une combinaison peut être interprétée comme un tirage **simultané**, c'est-à-dire **sans ordre** (et donc forcément sans répétition...)

Ex : lorsque $A = \{a ; b ; c\}$, on a vu que $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\} ; A\}$

On a donc $\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3$ et $\binom{3}{3} = 1$.

Ex : 500 personnes ont acheté un billet pour tenter de gagner l'un des 10 lots qui sont mis en jeu. Un tirage au sort détermine les 10 heureux gagnants.

Il existe $\binom{500}{10}$ manières de répartir ces 10 lots : cela revient en effet à faire **une partie à 10 éléments de l'ensemble des 500 participants**.

En revanche, si ces 10 lots étaient numérotés (1^{er} prix, 2nd prix, etc...), il y aurait $\mathcal{A}_{500}^{10}$ possibilités car **il y aurait de l'ordre**.

2° Calcul des coefficients binomiaux

Propriété : Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Preuve : le nombre de parties à k éléments ordonnés est $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Mais pour une même partie à k éléments, il existe $k!$ permutations possibles.

$$\text{Donc } \binom{n}{k} = \frac{\mathcal{A}_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Exemples : si $n \geq 1$, on a :

- $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n-1} = n$
- Si $n \geq 2$, alors $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Remarques : 1. Par convention, $\binom{0}{0} = 1$

2. Si $k > n$ alors $\binom{n}{k} = 0$



- Aller dans « math »
- Sélectionner le menu « PROB » en appuyant sur la flèche de droite
- Choisir « 3 : Combinaison »
- Taper ${}_5C_2$ pour obtenir $\binom{5}{2}$

Ex1 : dans une course de douze chevaux, le nombre de tiercés dans le désordre est $\binom{12}{3} = 220$.

On a donc une chance sur 220 de trouver le tiercé dans le désordre.

Ex 2 : Je dispose de neuf personnes parmi lesquelles je dois composer un comité de trois personnes.

J'ai $\binom{9}{3} = 84$ possibilités.

Par contre, si ces trois personnes ont des postes différents (Président, Trésorier, Secrétaire), je vais avoir $\mathcal{A}_3^9 = 504$ possibilités car l'ordre devient important dans le choix.

Ex 3 : Cocher des nombres sur une grille : un tirage d'Euromillion consiste en un choix de 5 nombres compris entre 1 et 50 et de 2 étoiles comprises entre 1 et 12.

Il existe donc $\binom{50}{5} \times \binom{12}{2}$ tirages possibles, soit 139 838 160 tirages.

On a donc environ une chance sur 140 millions de gagner le gros lot.

3° Propriétés

Propriétés : Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

1. Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. Formule « de récurrence » : $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$

⇒ On a également la version $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ si besoin

Preuves : nous allons les effectuer de manière purement calculatoire.

$$\begin{aligned}
 1. \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-(n-k))! (n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{(n-n+k)! (n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \\
 &= \binom{n}{n-k}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 2. \binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))! (k+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)n!}{(n+1-k-1)! (k+1)k!} \\
 &= \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n!}{(n-k)! k!} \\
 &= \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

Remarque : $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments parmi n . C'est donc le nombre de façons de choisir k éléments parmi n . Mais choisir de prendre k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments qu'on ne prend pas. D'où $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Propriétés : *Triangle de Pascal*

Soit n un entier naturel, et soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

⇒ Cette formule est due au mathématicien français **Blaise Pascal**.

Preuve : démontrons cette propriété par le calcul. *Il existe d'autres preuves, dont une par dénombrement.*

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{(n-(k+1))! (k+1)!} \\
 &= \frac{n!}{(n-k)! k!} + \frac{n!}{(n-k-1)! (k+1)!} \\
 &= \frac{n! (k+1)}{(n-k)! (k+1)k!} + \frac{n! (n-k)}{(n-k)(n-k-1)! (k+1)!} \\
 &= \frac{n! (k+1)}{(n-k)! (k+1)!} + \frac{n! (n-k)}{(n-k)! (k+1)!} \\
 &= \frac{n! (k+1) + n! (n-k)}{(n-k)! (k+1)!} \\
 &= \frac{n! (k+1 + n-k)}{(n-k)! (k+1)!} \\
 &= \frac{n! (n+1)}{(n+1-k-1)! (k+1)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))! (k+1)!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}
 \end{aligned}$$

Remarque : de manière intuitive, $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de façons de choisir $k+1$ éléments parmi $n+1$. Par exemple, je souhaite constituer une équipe de $k+1$ élèves dans une classe de $n+1$ élèves dans laquelle se trouve Bernard. Il y a $\binom{n+1}{k+1}$ équipes possibles que je peux séparer en deux catégories :

- Les équipes avec Bernard, pour lesquelles il me reste à choisir k élèves parmi les n autres élèves. Cela fait donc $\binom{n}{k}$ possibilités
- Les équipes sans Bernard, pour lesquelles il me faut donc choisir $k+1$ élèves parmi les n élèves autres que Bernard. Cela fait donc $\binom{n}{k+1}$ possibilités

Cette formule peut se visualiser sous la forme d'un triangle appelé « Triangle de Pascal » :

- chaque ligne correspond à une valeur de n à partir de 0
- chaque colonne correspond à une valeur de k à partir de 0
- chaque valeur est la somme de la valeur du dessus et de celle qui la précède (et 0 s'il n'y a rien)

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

	Cas général	
	k	$k+1$
n	$\binom{n}{k}$	$+$ $\binom{n}{k+1}$
		$=$
$n+1$		$\binom{n+1}{k+1}$

Propriété : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Preuve : Soit A un ensemble fini à n éléments.

Pour tout entier $k \leq n$, on note A_k l'ensemble des parties de A à k éléments.

On a donc $\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \text{Card}(A_k) \\
 &= \text{Card}(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \text{ car les } A_k \text{ sont deux à deux disjoints} \\
 &= \text{Card}(\mathcal{P}(A)) \\
 &= 2^n
 \end{aligned}$$

Si on récapitule tout ce qui a été vu :

⇒ Lorsqu'il y a de l'ordre :

- s'il peut y avoir des répétitions, c'est un k -uplet et il y en a n^k (tirages successifs, avec remise)
- s'il n'y a pas de répétition possible, c'est un arrangement et il y en a $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (tirages successifs, sans remise)

⇒ Lorsqu'il n'y a pas d'ordre, il s'agit de combinaisons $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$ (tirage simultané)

Binôme de Newton

Soient a et b deux réels quelconques, et soit n un entier naturel.

$$(a + b)^n = (a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)$$

Lors de ce développement, dans chacun des n facteurs, il y a un choix à faire : prendre a ou b .

Toujours est-il que dans le développement final, chaque terme contiendra n lettres, avec un certain nombre de a et un certain nombre de b . On va donc obtenir des termes du type $a^k b^{n-k}$.

Or, pour obtenir $a^k b^{n-k}$, il a fallu choisir k fois le a parmi les n facteurs $(a + b)$. Et il existe $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix. D'où :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Cette formule est connue sous le nom de « formule du binôme de Newton ». Elle peut se prouver par récurrence.

Ex : Développer les expressions suivantes :

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Remarque : $(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} (-b)^k$

De manière pratique, si k est pair, c'est un « + », et si k est impair un « - »

Ex : $(a - b)^5 = 1a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - 1b^5$

Propriété : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$

Preuve : il s'agit du développement de $(1 + 1)^n$ et de $(1 - 1)^n$, tout simplement ! ☺