

SUITES & RÉCURRENCE

1^{ère} partie

I Rappels

1° Généralités

Forme explicite : $u_n = f(n)$

On peut calculer directement n'importe quel terme de la suite.

Ex : $u_n = 3n^2 - 7n + 1$ pour $n \geq 0$ (on a donc $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$)

$$u_4 = 3 \times 4^2 - 7 \times 4 + 1 = 21$$

Forme récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$ et le 1^{er} terme connu

Pour calculer un terme de la suite, il faut connaître le précédent, et donc tous les précédents...

→ Avec la calculatrice, utiliser Rep ou le mode suite

Ex : $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$ (avec $f(x) = 2x + 3$ donc)

Pour calculer u_4 , il faut connaître u_3 ; mais pour calculer u_3 , il faut u_2 ; etc.

$u_1 = 2u_0 + 3$	$u_2 = 2u_1 + 3$	$u_3 = 2u_2 + 3$	$u_4 = 2u_3 + 3$
$= 2 \times 1 + 3$	$= 2 \times 5 + 3$	$= 2 \times 13 + 3$	$= 2 \times 29 + 3$
$= 5$	$= 13$	$= 29$	$= 61$

Remarque : il existe une forme explicite de u_n dans cet exemple... On en reparlera plus tard !

Sens de variation : Une suite est dite croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite est dite décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Une suite est dite constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Trois méthodes :

❶ Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite est croissante (strictement si $u_{n+1} - u_n > 0$)

Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, la suite est décroissante (strictement si $u_{n+1} - u_n < 0$)

⇒ Utilisée dans la majorité des cas

❷ Comparaison du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour les suites à termes positifs

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, la suite est croissante

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, la suite est décroissante

⇒ Pratique avec des suites sous forme de puissances par exemple

❸ Uniquement dans le cas des suites explicites du type $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de la fonction f .

2° Suites arithmétiques

On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$.

On passe donc d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r (raison).

➔ Une suite est donc arithmétique si $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$

On peut exprimer une suite arithmétique sous forme explicite : $u_n = u_p + (n - p)r$ où $p \in \mathbb{N}$

Cas particuliers classiques : $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_1 + (n - 1)r$

La somme des termes consécutifs est $S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$

Ex : En septembre 2014, le loyer de l'appartement de Boris était de 800 € par mois. Ce loyer augmente de 1,50 € tous les mois. On note u_n son $n^{\text{ème}}$ loyer. S'il quitte ce logement fin juin 2021, quelle somme totale aura-t-il payée ?

On a $u_{n+1} = u_n + 1,5$ donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 1,5 et de 1^{er} terme $u_1 = 800$.

La forme explicite de u_n est donc $u_n = 800 + (n - 1) \times 1,5 = 798,5 + 1,5n$

Pour calculer la somme totale payée par Boris, il nous faut connaître le montant de son dernier loyer.

Or, juin 2021 est son 82^{ème} mois. ($6 \times 12 + 10 = 82$)

Le loyer de juin 2021 sera donc $u_{82} = 798,5 + 82 \times 1,5 = 921,5$

La somme totale payée sera donc $S = 82 \times \frac{800 + 921,5}{2}$
 $= 70\,581,5 \text{ €}$



Lorsque le 1^{er} terme est u_0 , il faut penser à **ajouter 1** pour le nombre de termes !

$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$ contient **16** termes (et $u_{14} + u_{15} + \dots + u_{42}$ contient **29** termes)

3° Suites géométriques

On appelle suite géométrique toute suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$

On passe donc d'un terme à l'autre en **multipliant** toujours par le même nombre q (raison).

➔ Une suite est donc géométrique si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On peut exprimer une suite géométrique sous forme explicite : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Cas particuliers classiques : $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

La somme des termes consécutifs est $S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$

Ex : En septembre 2012, le loyer de l'appartement de Boris était de 700 € par mois. Ce loyer augmente de 0,25% tous les mois. On note u_n son $n^{\text{ème}}$ loyer. S'il quitte ce logement fin mars 2020, quelle somme totale aura-t-il payée ?

On a $u_{n+1} = 1,0025 \times u_n$ donc la suite (u_n) est une géométrique de raison 1,0025 et de 1^{er} terme $u_1 = 700$

La forme explicite de u_n est donc $u_n = 700 \times 1,0025^{n-1}$ (même si on n'en a pas besoin ici)

Pour calculer la somme totale payée par Boris, il nous faut connaître le nombre de loyers qu'il a payés.

Or, mars 2020 est son 91^{ème} mois : il aura donc payé 91 loyers.

$$\begin{aligned} \text{La somme totale payée sera donc } S &= 700 \times \frac{1 - 1,0025^{91}}{1 - 1,0025} \\ &\approx 71\,428,30 \text{ €} \end{aligned}$$

Remarque : Le loyer de mars 2020 était de $700 \times 1,0025^{91} \approx 876,38 \text{ €}$

II Démonstration par récurrence

Il s'agit d'un outil permettant de prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, c'est-à-dire pour tout entier à partir d'un certain rang. Cela permet notamment de vérifier que certaines conjectures sont vraies.

Par exemple, dans le I 1°, on s'est intéressé à la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$. On a calculé $u_1 = 5$, $u_2 = 13$, $u_3 = 29$ et $u_4 = 61$.

Or, la formule $u_n = 2^{n+2} - 3$ donne 5 pour $n = 1$, puis 13 pour $n = 2$, puis 29 pour $n = 3$ et 61 pour $n = 4$: est-ce un coup de chance, ou bien cette formule donne-t-elle tout le temps les valeurs de u_n ?

L'idée de la récurrence repose sur le principe suivant : si je suis sur une marche d'escalier et que je sais comment passer d'une marche à la suivante, alors je suis capable d'atteindre n'importe quelle marche ! Mais attention : si je sais seulement passer d'une marche à l'autre, cela ne suffit pas. Par exemple, si la première marche est à 5 mètres de hauteur, j'aurai du mal à y monter... Et donc, même si je connais la technique pour passer d'une marche à l'autre, je resterai coincé en bas de l'escalier.

Démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie « pour tout $n...$ » s'effectue en trois étapes (et ce qui est écrit en gras apparaîtra *toujours* dans la rédaction)

Initialisation : $n =$ (préciser la première valeur de n pour laquelle on va prouver la propriété)

⇒ On va vérifier que la propriété à démontrer est vraie pour cette première valeur de n

Hérédité : Supposons que (propriété à démontrer) **pour un certain rang $n \geq$** (1^{er} rang)

↪ c'est notre « Hypothèse de Récurrence »

Montrons que (propriété à démontrer, au rang suivant ; autrement dit, mettre ici la propriété à démontrer dans laquelle on remplace « n » par « $n + 1$ »)

On a / on sait que (et c'est là qu'on commence à réfléchir à la manière de prouver les choses...)

Par récurrence, on a (mettre ici la propriété à démontrer) **pour n** (à préciser)

⇒ On rappelle en conclusion qu'on a démontré la propriété voulue par récurrence.

Ex 1 : On considère la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$. Prouver que pour tout $n \geq 0$ on a $u_n = 2^{n+2} - 3$. (nous allons enfin le prouver !)

Initialisation : $n = 0$

Brouillon : on doit montrer que $u_0 = 2^{0+2} - 3$

$$u_0 = 1 \text{ d'après l'énoncé et } 2^{0+2} - 3 = 4 - 3 = 1$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : supposons que $u_n = 2^{n+2} - 3$ pour un certain rang n

Montrons que $u_{n+1} = 2^{n+3} - 3$

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 2u_n + 3 \\ &= 2(2^{n+2} - 3) + 3 \text{ par HR} \\ &= 2 \times 2^{n+2} - 6 + 3 \\ &= 2^{n+3} - 3 \end{aligned}$$

Par récurrence, on peut donc dire que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^{n+2} - 3$.

Ex 2 : Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : $n = 1$

Brouillon : on doit montrer que $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 \text{ (un seul terme) et } \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 : \text{ la propriété est vérifiée}$$

Hérédité : Supposons que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain rang n .

$$\text{Montrons que } \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{i=1}^{n+1} i &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ par HR} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Par récurrence, on peut donc dire que pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : on pouvait retrouver cette propriété en utilisant la suite $u_{n+1} = u_n + 1$ et $u_1 = 1$

C'est une suite arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme $u_1 = 1$: la somme de ses n premiers termes

$$\text{est donc } n \times \frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ex 3 : Démontrer que la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$ et $u_0 = 2$ est croissante.

→ Ici, on va montrer par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq 0$

Initialisation : $n = 0$

Brouillon : on doit montrer que $u_{0+1} \geq u_0$

$u_1 = \sqrt{2 \times 2 + 1} = \sqrt{5} \geq 2$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que $u_{n+1} \geq u_n$ pour un certain rang n .

Montrons que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ c'est-à-dire que $\sqrt{2u_{n+1} + 1} \geq \sqrt{2u_n + 1}$

Or, $u_{n+1} \geq u_n$ par HR

$$2u_{n+1} \geq 2u_n$$

$$2u_{n+1} + 1 \geq 2u_n + 1$$

$$\sqrt{2u_{n+1} + 1} \geq \sqrt{2u_n + 1} \quad \text{car la fonction racine carrée est croissante sur } [0 ; +\infty[.$$



Pour démontrer une inégalité par récurrence, il est souvent plus pratique de débiter par l'HR

Par récurrence, on peut donc dire que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .

Ex 4 : inégalité de Bernoulli (utilisée plus tard, dans un autre chapitre...)

Soit a un réel tel que $a \geq -1$. Démontrer que pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Initialisation : $n = 0$

Brouillon : on doit montrer que $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$

$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$: la propriété est bien vérifiée.

Hérédité : Supposons que $(1 + a)^n \geq 1 + na$ soit vraie pour un certain rang n .

A
U

P
R
O
G
R
A
M
M
E

Montrons que $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

On a $(1 + a)^n \geq 1 + na$ par HR

$$(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) \quad \text{car } 1 + a > 0$$

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + na + a + na^2$$

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2$$

Or, $na^2 \geq 0$ donc $1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$

Au final, $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$

Par récurrence, on a donc $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout entier naturel n .

C-ex : Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, 2^n est divisible par 3.

Supposons que pour un certain n , 2^n est divisible par 3. Montrons que 2^{n+1} est divisible par 3.

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n$$

$$= 2 \times 3k \quad \text{par HR}$$

$$= 3 \times 2k \quad \text{ce qui signifie que } 2^{n+1} \text{ est divisible par 3.}$$

Par récurrence, on peut donc dire que pour tout entier $n \geq 0$, 2^n est divisible par 3.

Or, $2^3 = 8$ par exemple, et 8 n'est pas divisible par 3 !

Morale de l'histoire : l'initialisation n'est pas une étape facultative

III Limite d'une suite

1° Définition

Limite finie : on dit que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ si les valeurs de u_n s'approchent aussi près que l'on veut de ℓ à partir d'un certain rang.

Autrement dit, il existe un certain rang à partir duquel l'écart entre u_n et ℓ est aussi petit que l'on veut, c'est-à-dire plus petit que la précision que l'on choisit.

On dit alors que la suite (u_n) est **convergente** et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Ex 1 : $\begin{cases} u_{n+1} = 0,25(u_n)^2 + 1 \\ u_0 = 0,5 \end{cases}$ semble converger vers **2**

Essayons de formaliser cette définition :

« l'écart entre u_n et ℓ est plus petit que la précision choisie »

Quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie, il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,$

$\exists N \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Ce qui donne finalement : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

$\underbrace{\quad}_{\text{la précision}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{un rang}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{tel que}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{si}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{alors}}$

Cette définition très rigoureuse permet de définir une méthode pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite le réel ℓ :

1. Choisir une précision ε quelconque
2. En fonction de cette précision ε (qui est donc maintenant *fixée*), déterminer la valeur N du rang (qui dépend donc d'épsilon) à partir de laquelle on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Ex 2 : $u_n = \frac{7 + 9n}{2n}$ semble converger vers **4,5**. Démontrons-le.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |u_n - 4,5| &= \left| \frac{7 + 9n}{2n} - 4,5 \right| \\ &= \left| \frac{7 + 9n - 9n}{2n} \right| \\ &= \left| \frac{7}{2n} \right| = \frac{7}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |u_n - 4,5| < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{7}{2n} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2} < \varepsilon n \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2\varepsilon} < n \end{aligned}$$

Notons $N = \left\lceil \frac{7}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$.

Si $n \geq N$ alors on a $|u_n - 4,5| < \varepsilon$: la suite (u_n) converge donc vers **4,5**.

Limite infinie : on dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si les valeurs de u_n deviennent aussi grande que l'on veut à partir d'un certain moment.

Autrement dit, il existe un certain rang à partir duquel toutes les valeurs de u_n sont plus grandes que n'importe quel seuil qu'on pourrait fixer.

On dit alors que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (ou « a pour limite $+\infty$ ») et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit aussi que la suite u_n diverge vers $+\infty$.

Ex 1 : $\begin{cases} v_{n+1} = 0,3(v_n)^2 + 1 \\ v_0 = 0,5 \end{cases}$ semble tendre vers $+\infty$

Essayons de formaliser cette définition :

Quel que soit le seuil $A > 0$, il existe un rang N à partir duquel $u_n \geq A$

Ce qui donne finalement : $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$

Cette définition très rigoureuse permet de définir une méthode pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$:

1. Choisir un seuil A quelconque
2. En fonction de ce seuil (qui est donc maintenant fixé), déterminer la valeur N du rang (qui dépend donc d'épsilon) à partir de laquelle on a $u_n > A$.

Ex 2 : $u_n = 5n^2 - 4$ semble tendre vers $+\infty$. Prouvons-le.

Soit $A > 0$.

$$\begin{aligned} u_n \geq A &\Leftrightarrow 5n^2 - 4 \geq A \\ &\Leftrightarrow 5n^2 \geq A + 4 \\ &\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{A + 4}{5} \\ &\Leftrightarrow n \geq \sqrt{\frac{A + 4}{5}} \quad \text{car } n \geq 0 \end{aligned}$$

Notons $N = \left\lceil \sqrt{\frac{A + 4}{5}} \right\rceil + 1$.

Si $n \geq N$ alors $u_n > A$: la suite tend donc vers $+\infty$.

Remarques : 1° On pourrait définir de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$$

2° Lorsqu'on parle de suite divergente, cela ne signifie pas qu'elle tend nécessairement vers $\pm\infty$. Une suite divergente est en effet une suite qui n'est pas convergente, c'est-à-dire qui ne converge pas vers un nombre réel. On parle donc également de suite divergente pour des suites qui n'ont pas de limite comme $u_n = (-1)^n$ par exemple.

2° Calcul

On dispose de quelques limites de référence :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

De même, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Limite d'une somme :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

C-ex : prenons $u_n = n + \pi$ et $v_n = -n$. On a alors $u_n + v_n = n + \pi - n = \pi$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n = \pi$$

$(u_n + v_n)$ peut aussi tendre vers $+\infty$ ou vers $-\infty$: tout dépend lequel des deux est le plus fort...

Limite d'un produit :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

C-ex : prenons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \pi n$. On a alors $u_n \times v_n = \frac{1}{n} \times \pi n = \pi$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n = \pi$$

Avec $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, $u_n \times v_n = n$ et tend donc vers $+\infty$.

Avec $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, $u_n \times v_n = \frac{1}{n}$ et tend donc vers 0.

Limite d'un quotient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	± 0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	± 0	± 0	$\ell' \neq 0$	± 0	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

C-ex : Là encore, tout dépend de qui est le plus fort...

Pour « lever l'indéterminée », c'est-à-dire « calculer une limite correspondant à une FI », on utilise le calcul algébrique et notamment les factorisations. Ainsi, factoriser par le terme le plus fort donne souvent de très bons résultats pour les FI faisant intervenir $\pm\infty$

Ex : Déterminer les limites des suites suivantes :

• $u_n = n^2 - n$ $\rightarrow$ c'est une FI du type $+\infty - \infty$

$$u_n = n(n - 1)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

• $u_n = \frac{4n^2 - 5n + 1}{7 - 2n}$ $\rightarrow$ c'est une FI du type $\frac{+\infty}{-\infty}$

$$u_n = \frac{n^2 \left(4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(\frac{7}{n} - 2 \right)}$$

$$= n \frac{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{7}{n}}$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} = 4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{7}{n} = -2$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{-2 + \frac{7}{n}} = \frac{4}{-2} = -2$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

• $u_n = \sqrt{n} - n$ $\rightarrow$ c'est une FI du type $+\infty - \infty$

$$u_n = n \left(\frac{\sqrt{n}}{n} - 1 \right)$$

$$= n \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}^2} - 1 \right)$$

$$= n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 = -1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

A suivre...