

PRODUIT SCALAIRE

2^{ème} partie

I Produit scalaire et orthogonalité

1° Vecteurs orthogonaux

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Remarque : par convention, le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout autre vecteur.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Preuve : Si l'un des vecteurs est nul, c'est immédiat.

$$\text{Et sinon, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-\pi}{2}$$

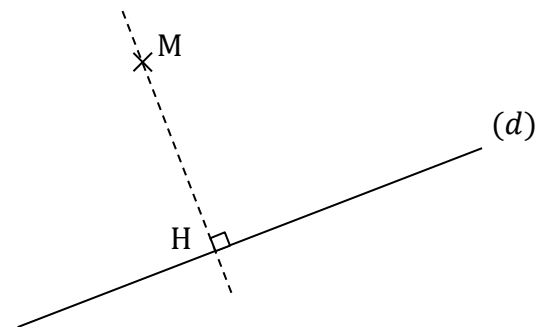
$$\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux}$$

$$\text{Conséquence : } (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

2° Projection orthogonale

Définition : Soit (d) une droite et M un point du plan.

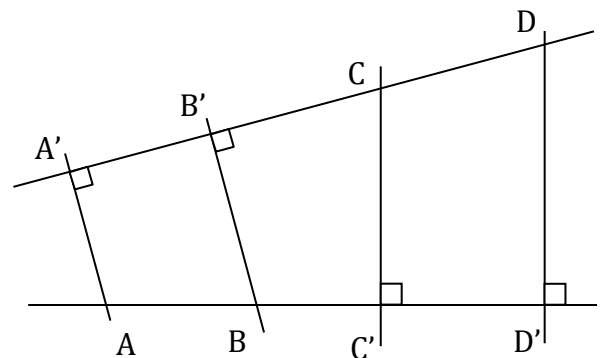
Le projeté orthogonal de M sur (d) est le point d'intersection H de (d) avec la perpendiculaire à (d) passant par M.



Propriété : Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls.

On note C' et D' les projetés orthogonaux de C et D sur la droite (AB), et A' et B' ceux de A et B sur la droite (CD).

$$\text{On a alors } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD} \end{cases}$$



$$\text{Preuve : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D})$$

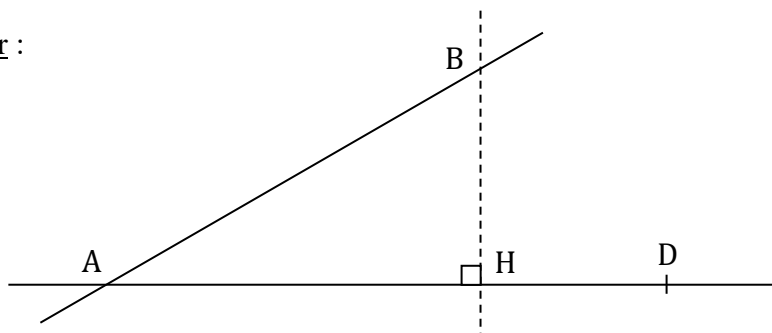
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}$$

$$= 0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + 0$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$$

⇒ Par abus de langage, c'est donc comme si l'on remplaçait l'un des deux vecteurs par son projeté orthogonal sur l'autre vecteur.

Cas particulier :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Intérêt : le nouveau produit scalaire concerne deux vecteurs colinéaires ! D'où :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et **de même sens**, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et **de sens opposés**, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

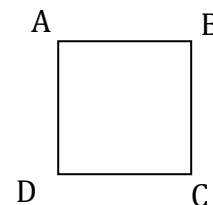
Preuve : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et **de même sens**, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(0) = 1$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et **de sens opposés**, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\pi) = -1$

Ex : Soit ABCD un carré de côté a .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ par projection} \\ &= AB^2 = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} \text{ par projection} \\ &= -AB^2 = -a^2 \end{aligned}$$



3° Cas du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

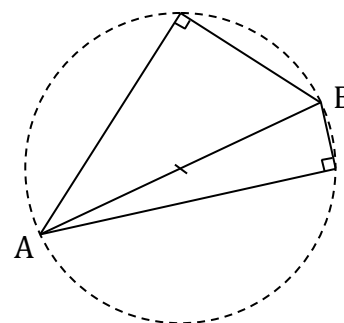
Propriété : Soient A et B deux points distincts.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est **le cercle de diamètre [AB]**.

Autrement dit, AMB est rectangle en M $\Leftrightarrow$ **M appartient au cercle de diamètre [AB]**.

Preuve : Soit O le milieu de [AB].

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ &\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow MO^2 = OA^2 \\ &\Leftrightarrow MO = OA \end{aligned}$$



M appartient donc **au cercle de centre O et de rayon OA**, c-a-d. **le cercle de diamètre [AB]**.

II Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Cela signifie que
$$\begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ (repère « ortho »)} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ (repère « normé »)} \end{cases}$$

Propriété : dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$

Preuve :
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= xx' + yy' \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ On retrouve la formule connue : si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ex : Soient A(-2 ; -1), B(1 ; 1), C(3 ; -4) et D(-1 ; 2).
Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 - 3 \\ 2 - (-4) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= 3 \times (-4) + 2 \times 6 \\ &= -12 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc (AB) $\perp$ (CD).

Ex : Soient J(2 ; -5), K(-3 ; 4) et L(3 ; 2). Déterminer $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL})$ au dixième de degré près.

$$\overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -3 - 2 \\ 4 - (-5) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 2 - (-5) \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \overrightarrow{JL} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} &= -5 \times 1 + 9 \times 7 & \overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL} &= JK \times JL \times \cos(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}) \\ &= -5 + 63 & &= \sqrt{(-5)^2 + 9^2} \times \sqrt{1^2 + 7^2} \times \cos(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}) \\ &= 58 & &= \sqrt{106} \times \sqrt{50} \times \cos(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}) \end{aligned}$$

D'où $58 = \sqrt{106} \times \sqrt{50} \times \cos(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL})$

$$\begin{aligned} \frac{58}{\sqrt{106} \times \sqrt{50}} &= \cos(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}) \\ (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JL}) &= \cos^{-1} \left(\frac{58}{\sqrt{106} \times \sqrt{50}} \right) \approx 37,2^\circ \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait le faire avec Al-Kashi