

VARIABLES ALÉATOIRES

I Définition et notation

Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, lors d'une expérience aléatoire, une variable aléatoire associe à chaque issue un nombre / une valeur.

Ex : On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le résultat est 6, on gagne 5 €. Si c'est un 5 ou un 4, on ne gagne rien. Et sinon, on perd 2 €. On note X la variable aléatoire donnant le gain d'un joueur.

Si l'issue de l'expérience est 6 alors X lui associe 5 (car X est le gain !)

Si l'issue de l'expérience est 4 ou 5 alors X lui associe 0.

Si l'issue de l'expérience est 1, 2 ou 3 alors X lui associe -2.

$\Rightarrow X$ peut donc prendre les valeurs 5, 0 et -2 : on peut noter $X(\Omega) = \{-2 ; 0 ; 5\}$

Notation : on note généralement x_i les valeurs que X peut prendre.

$(X = x_i)$ est donc l'événement correspondant aux issues pour lesquelles X prend la valeur x_i .

De même, $(X \geq x_i)$ est l'événement correspondant aux issues pour lesquelles X prend des valeurs supérieures ou égales à x_i .

Ex : dans l'exemple précédent, les « x_i » sont -2, 0 et 5.

$(X = -2)$ est l'événement « Le joueur perd deux euros ». Cela correspond aux issues 1, 2 et 3.

$(X \geq 0)$ est l'événement « Le gain du joueur est positif ». Cela correspond aux issues 4, 5 et 6.

II Loi de probabilité

Donner la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est donner les probabilités de toutes les issues de l'univers, généralement sous la forme d'un tableau.

Et donner la loi de probabilité d'une variable aléatoire, c'est donner les probabilités de toutes les valeurs que cette variable aléatoire peut prendre.

Autrement dit, c'est donner les probabilités de tous les événements $(X = x_i)$.

On note généralement $p_i = p(X = x_i)$.

On a alors $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Ex : Un forain propose le jeu suivant : pour une mise de 2 €, on tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Si c'est un cœur, on gagne 2 € et si c'est un roi, on gagne 8 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique d'un joueur. Déterminer la loi de X.

X peut prendre les valeurs $-2, 0, 6$ et 8 .

$X = 8$ correspond à l'issue « *Roi de cœur* » donc $p(X = 8) = \frac{1}{32}$

$X = 6$ correspond aux rois sauf celui de cœur donc $p(X = 6) = \frac{3}{32}$

$X = 0$ correspond aux cœurs sauf le roi donc $p(X = 0) = \frac{7}{32}$

Et pour la dernière valeur, on utilise le fait que la somme des probabilités vaut 1.

La loi de X est :

x_i	-2	0	6	8
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

III Caractéristiques d'une variable aléatoire

1° Espérance

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.

On note $p_i = p(X = x_i)$.

L'espérance de X est définie par $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$

Autrement dit, $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$

⇒ L'espérance est la moyenne des valeurs prises par X lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre de fois (loi des grands nombres)

Ex : Dans l'exemple précédent, on a :

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \frac{21}{32} \times (-2) + \frac{7}{32} \times 0 + \frac{3}{32} \times 6 + \frac{1}{32} \times 8 \\
 &= \frac{-42}{32} + 0 + \frac{18}{32} + \frac{8}{32} \\
 &= \frac{-16}{32} = -0,5
 \end{aligned}$$

En moyenne, on perd donc 50 centimes à ce jeu.

Remarque : un jeu est dit « *équitable* » lorsque le gain moyen est nul. Autrement dit, si X est la variable aléatoire correspondant au gain, le jeu est équitable si $E(X) = 0$

2° Ecart-type

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$.
On note $p_i = p(X = x_i)$.

La variance de X est définie par $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$

Autrement dit, $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$

Et l'écart-type de X est $\sigma = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$ (pour revenir dans l'unité initiale)

⇒ L'écart-type caractérise la dispersion des valeurs prises par X autour de $E(X)$.

Pour donner un ordre de grandeur, on peut d'une certaine manière imaginer que 68% des valeurs d'une série sont dans $[E(X) - \sigma ; E(X) + \sigma]$ et 95% des valeurs sont dans $[E(X) - 2\sigma ; E(X) + 2\sigma]$

Ex : Dans l'exemple précédent, on avait $E(X) = -0,5$ et :

x_i	-2	0	6	8
p_i	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$V(X) = \frac{21}{32}(-2 - (-0,5))^2 + \frac{7}{32}(0 - (-0,5))^2 + \frac{3}{32}(6 - (-0,5))^2 + \frac{1}{32}(8 - (-0,5))^2$$
$$= 7,75$$

$$\sigma = \sqrt{7,75} \approx 2,78$$

3° Avec la calculatrice

Entrer la série dans la calculatrice :



- Aller dans « stats »
- Sélectionner « 1 : Modifier... »
- Entrer dans L_1 les valeurs de la série et dans L_2 les coefficients / effectifs.
 - ⇒ Pour effacer les valeurs de L_1 par exemple, aller sur L_1 (avec la flèche du haut) et appuyer sur « annul ».
- Quitter en faisant « 2nde » et « mode ».

Lancer les calculs des indicateurs :



- Aller dans « stats »
- Aller dans le menu « CALC » (flèche vers la droite)
- Sélectionner « 1 : Stats 1 Var ».
- Indiquer L_1 dans « Xliste : » (en faisant « 2nde » et la touche « 1 ») et L_2 dans « ListeFréq : »
- Valider « Calculer ».