

EXPONENTIELLES

I La fonction exponentielle

1° Définition

Théorème : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

(admis)

Définition : on appelle « fonction exponentielle » l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note cette fonction $\exp$.

On a donc $\exp(0) = 1$ et $\exp'(x) = \exp(x)$.

Propriété : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$. (admis)

$\Rightarrow$ on retiendra qu'une exponentielle est TOUJOURS positive (strictement).

Conséquence : la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Remarque : on parle de « croissance exponentielle » pour désigner une croissance extrêmement rapide.

Ainsi, $\exp(10) \approx 22\,026$ et $\exp(21) \approx 1\,318\,815\,734$ (plus d'un milliard)

Tangente à l'origine : $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

$$= \exp(0)x + 1$$

$$= 1x + 1$$

$$= x + 1$$

D'où la représentation graphique de la fonction exponentielle :

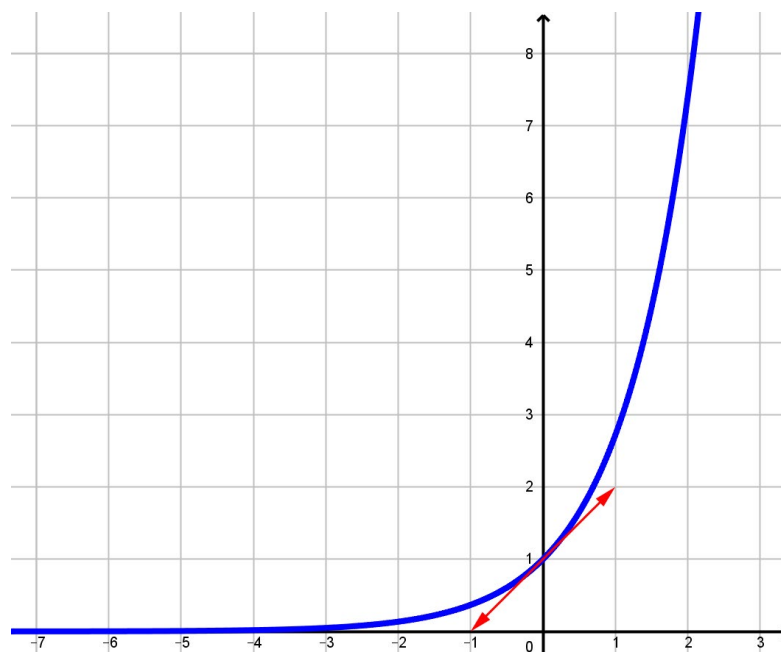
$$\exp(-4) \approx 0,02$$

$$\exp(-2) \approx 0,14$$

$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(1) \approx 2,72$$

$$\exp(2) \approx 7,4$$



2° Propriétés algébriques

Propriété fondamentale : Pour tous réels a et b , on a $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Preuve : voir en fin de chapitre

Corollaires : Pour tous réels a et b , on a :

$$1^\circ \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)} \quad \text{et} \quad \exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

$$2^\circ \text{ Pour tout } n \in \mathbb{Z}, \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

Preuves : Démontrons la propriété 1° :

On a $\exp(a + (-a)) = \exp(a) \times \exp(-a)$ d'après la propriété fondamentale

$$\exp(0) = \exp(a) \times \exp(-a)$$

$$1 = \exp(a) \times \exp(-a)$$

$$\text{D'où } \exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$$

On en déduit que $\exp(a - b) = \exp(a + (-b))$

$$= \exp(a) \times \exp(-b)$$

$$= \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)}$$

$$= \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

3° Une nouvelle notation

Les propriétés énoncées au paragraphe précédent font penser aux propriétés des puissances.

On note alors $\exp(x) = e^x$

En résumé, on a donc :

$$(e^x)' = e^x$$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e \approx 2,72$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$e^x > 0$$

Remarque : e est un nouvel exemple de nombre irrationnel, c'est-à-dire ne pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction.

D'autres exemples de nombres irrationnels ont été vus en seconde, comme π et $\sqrt{2}$.

« e » est même transcendant (tout comme π) : il n'est solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers (contrairement à $\sqrt{2}$)

Ex : Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^9 \times e^{-4}}{e^2}$$

$$= \frac{e^5}{e^2}$$

$$= e^3$$

$$B = \frac{e \times e^4}{(e^{-2})^3}$$

$$= \frac{e^5}{e^{-6}}$$

$$= e^{5-(-6)} = e^{11}$$

$$C = \frac{(e^{3-5x})^2}{e^{2+3x} \times e^{-7x}}$$

$$= \frac{e^{6-10x}}{e^{2-4x}}$$

$$= e^{6-10x-(2-4x)}$$

$$= e^{6-10x-2+4x}$$

$$= e^{4-6x}$$

Ex : Vérifier que $\frac{e^{1-x}}{e^{-2x} + e^x} = \frac{e^{1+x}}{1 + e^{3x}}$

$$\frac{e^{1-x}}{e^{-2x} + e^x} = \frac{e^{1-x} \times e^{2x}}{(e^{-2x} + e^x)e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{1-x+2x}}{e^{-2x} \times e^{2x} + e^x \times e^{2x}}$$

$$= \frac{e^{1+x}}{e^0 + e^{3x}} = \frac{e^{1+x}}{1 + e^{3x}}$$

II Equations & inéquations

Propriété : soient a et b deux nombres réels.

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Preuve : c'est une conséquence directe de la croissance de la fonction exponentielle.

Ex : Résoudre l'équation $e^{3x^2-8} - e^{2-x} = 0$

$$e^{3x^2-8} = e^{2-x}$$

$$3x^2 - 8 = 2 - x$$

$$3x^2 - 8 - 2 + x = 0$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-10) \qquad x_1 = \frac{1 + \sqrt{121}}{2 \times 3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1 - \sqrt{121}}{2 \times 3}$$

$$= 1 + 120 \qquad = \frac{1 + 11}{6} \qquad = \frac{1 - 11}{6}$$

$$= 121 \qquad = \frac{12}{6} = 2 \qquad = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{-5}{3} ; 2 \right\}$$

Ex : Résoudre l'inéquation $e^{3-5x} \geq 1$

$$e^{3-5x} \geq e^0$$

$$3 - 5x \geq 0$$

$$3 \geq 5x$$

$$x \leq \frac{3}{5}$$

Donc $S = \left] -\infty ; \frac{3}{5} \right]$

Cas particulier : on souhaite résoudre l'équation suivante : $5e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

On pose $X = e^x$: on a alors $X^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$

L'équation devient :

$$5X^2 - 2X - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 5 \times (-3) \\ &= 4 + 60 \\ &= 64\end{aligned}$$

Or, $X = e^x$ donc $X > 0$.

La seule possibilité est donc $X = 1$ c'est-à-dire $e^x = 1$

D'où $x = 0$.

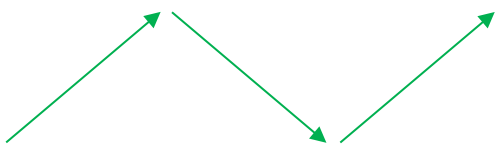
Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - x - 4)e^x$

1. Déterminer les variations de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Effectuer la représentation graphique de f .

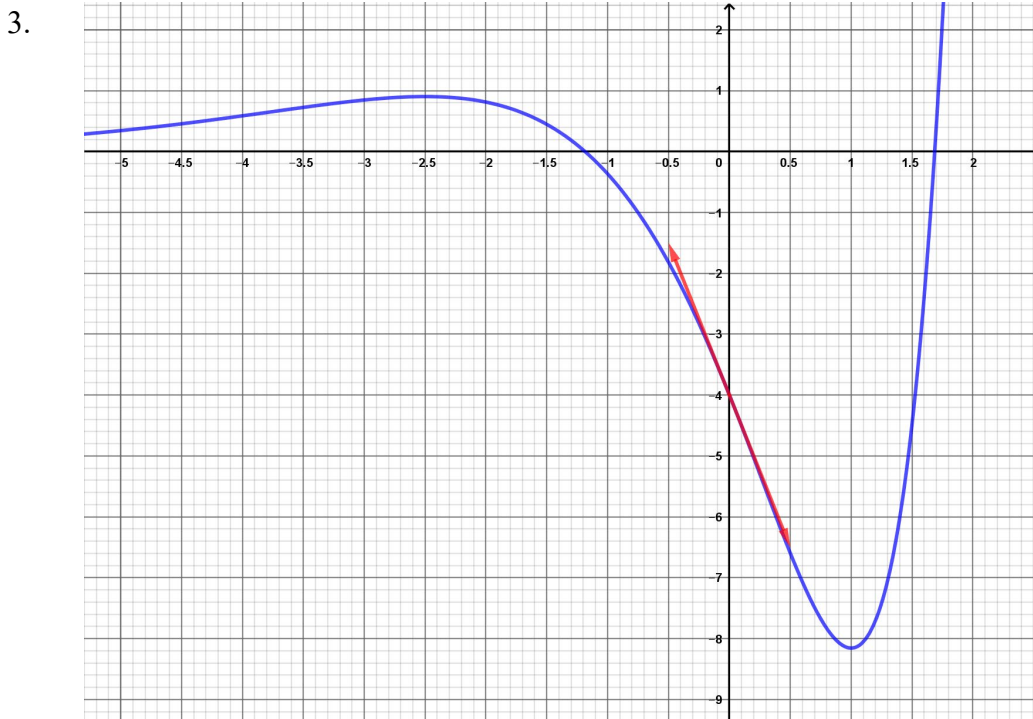
$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= (4x - 1)e^x + e^x(2x^2 - x - 4) \\ &= e^x(4x - 1 + 2x^2 - x - 4) \\ &= e^x(2x^2 + 3x - 5) \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $(2x^2 + 3x - 5)$ car $e^x > 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \times 2 \times (-5) & x_1 &= \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \times 2} & \text{et} & & X_2 &= \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ &= 9 + 40 & &= \frac{-3 + 7}{4} & & & &= \frac{-3 - 7}{4} \\ &= 49 & &= \frac{4}{4} = 1 & & & &= \frac{-10}{4} = -2,5\end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-2,5$	1	$+\infty$
$2x^2 + 3x - 5$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$				

$$\begin{aligned}
 2. \quad y &= f'(0)(x - 0) + f(0) \\
 &= e^0(0 - 5)x + (-4)e^0 \\
 &= -5x - 4
 \end{aligned}$$



Remarque : à ce stade, on ne sait pas résoudre de manière exacte une équation aussi simple que $e^x = 2$ par exemple... Il faudra attendre la classe de terminale !

III Fonctions exponentielles de la forme $f(x) = e^{kx}$

Propriété : Soit k un nombre réel quelconque.

La fonction $f(x) = e^{kx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = k \times e^{kx}$

$\Rightarrow$ Plus généralement, la dérivée de $f(x) = e^{u(x)}$ est $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Ex : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4e^{-2x}$$

$$g(x) = -3e^{\frac{x}{5}}$$

$$h(x) = -8e^{-3x}$$

$$f'(x) = 4 \times (-2)e^{-2x}$$

$$g'(x) = -3 \times \frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}}$$

$$h'(x) = -8 \times (-3)e^{-3x}$$

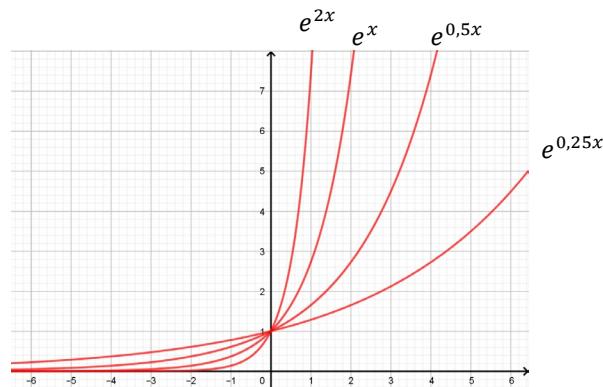
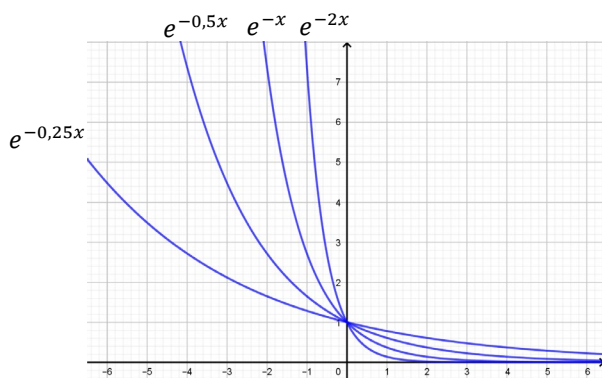
$$= -8e^{-2x}$$

$$= -\frac{3}{5}e^{\frac{x}{5}}$$

$$= 24e^{-3x}$$

Propriété : Si $k > 0$, alors $f(x) = e^{kx}$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$.

Si $k < 0$, alors $f(x) = e^{kx}$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.



Ex : La vasopressine (ou AVP pour arginine-vasopressine) est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme. Son taux dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à $2,5 \mu\text{g/mL}$. Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production d'AVP suite à une hémorragie.

On utilisera la modélisation $f(t) = 3te^{-0,25t} + 2$ pour $t \geq 0$, où $f(t)$ représente le taux d'AVP (en $\mu\text{g/mL}$) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. a. Quel est le taux d'AVP dans le sang à l'instant $t = 0$?
 b. Justifier que 12 secondes après une hémorragie, le taux d'AVP dans le sang n'est pas normal.
2. a. Vérifier que pour tout nombre réel t positif, $f'(t) = (3 - 0,75t)e^{-0,25t}$
 b. À quel instant le taux d'AVP est-il maximal ? Quel est alors ce taux à 10^{-2} près ?

1. a. $f(0) = 3 \times 0e^{-0,25 \times 0} + 2 = 2$

Le taux d'AVP dans le sang à l'instant $t = 0$ est de $2 \mu\text{g/mL}$.

b. On a $12 \text{ s} = \frac{12}{60} \text{ min} = 0,2 \text{ min}$

$f(0,2) = 3 \times 0,2e^{-0,25 \times 0,2} + 2 \approx 2,57 > 2,5$

Douze secondes après une hémorragie, le taux d'AVP dans le sang n'est donc pas normal.

2. a. $f'(t) = 3e^{-0,25t} - 0,25e^{-0,25t} \times 3t$

$= e^{-0,25t}(3 - 0,75t)$

b. Le signe de $f'(t)$ dépend du signe de $(3 - 0,75t)$ car $e^{-0,25t} > 0$.

t	0	4	$+\infty$
$f'(t)$	+	−	
$f(t)$			

Le taux d'AVP est maximal **4 minutes** après l'hémorragie.

Et ce taux est alors de $f(4) = 3 \times 4e^{-0,25 \times 4} + 2 = 12e^{-1} + 2 \approx 6,41 \mu\text{g/mL}$