

PRODUIT SCALAIRE

1^{ère} partie

Il s'agit d'un outil mathématique récent (fin du XIX^{ème} siècle) permettant d'exploiter des données géométriques (longueurs, angles...). Il permet par exemple en physique de quantifier le travail d'une force, c'est-à-dire l'énergie fournie par une force lorsque son point d'application se déplace (suite au déplacement ou à la déformation d'un objet).

On l'appelle « produit » car certaines de ses propriétés rappellent celles des multiplications, et « scalaire » (du latin « scala » : échelle) signifie que la grandeur exprimée est une quantité, un nombre (sans direction notamment, par opposition au « produit vectoriel » dont le résultat est un vecteur)

I Définition et propriétés

1° Définition à partir d'un angle

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur dont un représentant est $\overrightarrow{AB}$.

La norme de $\vec{u}$ est le réel positif défini par $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Autrement dit, la norme d'un vecteur est la longueur de ce vecteur.

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

Remarques : 1. Attention : un produit scalaire est un nombre et non pas un vecteur...

2. Par convention, si l'un des deux vecteurs est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (et pas $\vec{0}$!)

2° Symétrie du produit scalaire

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Preuve : On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls (sinon, la preuve est immédiate)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{u}; \vec{v})) \text{ car } \cos(-x) = \cos(x)$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u})$$

$$= \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Conséquence : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

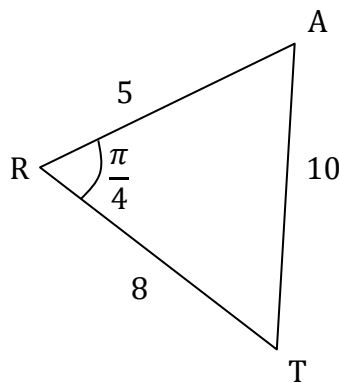
$$= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$



Cette dernière formule ne fonctionne qu'avec des vecteurs de même origine !

Ex 1 : On considère le triangle RAT ci-contre :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RT} &= RA \times RT \times \cos \widehat{ART} \\ &= 5 \times 8 \times \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 20\sqrt{2}\end{aligned}$$



Ex 2 : Sachant que $ST = 4$, $SR = 7$ et $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SR} = -10$, calculer l'angle $\widehat{RST}$ au dixième de degré près.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{SR} &= ST \times SR \times \cos (\widehat{RST}) \\ -10 &= 4 \times 7 \times \cos (\widehat{RST}) \\ \frac{-10}{28} &= \cos (\widehat{RST}) \\ \widehat{RST} &= \cos^{-1} \left(\frac{-10}{28} \right) \\ &\approx 110,9^\circ\end{aligned}$$

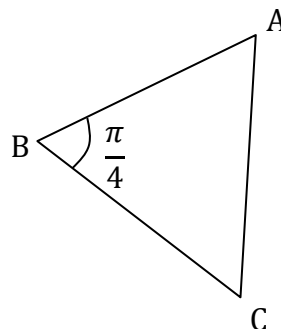


Et si les vecteurs n'ont pas la même origine... ?

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = BA \times CB \times \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$$

Or, l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB})$ n'est pas l'angle $\widehat{ABC}$:

$$\text{Avec la figure ci-contre, } (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = \pi - (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{3\pi}{4}$$



3° Bilinéarité du produit scalaire

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, k et k' deux nombres réels.

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(k\vec{u}) \cdot (k'\vec{v}) = k \times k' (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\text{Ex : } 3\vec{u} \cdot (5\vec{v} - 2\vec{w}) = 15\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\text{Cas particulier : } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \cdot (-\overrightarrow{BC})$$

$$= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= -BA \times BC \times \cos \widehat{ABC} \text{ car les vecteurs ont la même origine !}$$



On tient donc une solution pour calculer simplement un produit scalaire de vecteurs d'origines différentes : remplacer un vecteur par son opposé !

4° Identités remarquables

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. On peut noter $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Si $\vec{u} = \vec{0}$, c'est immédiat.

Et sinon, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$

$$\text{D'où : } (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\text{Preuve : } (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$$

$$= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 \text{ par bilinéarité}$$

$$= \vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \text{ par symétrie}$$

$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

II Calculer un produit scalaire sans angles

Propriété : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad \text{Formule de polarisation}$$

$$\text{Preuve : } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2$$

$$= \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{D'où } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ et donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Ex : Calculer le produit scalaire suivant :

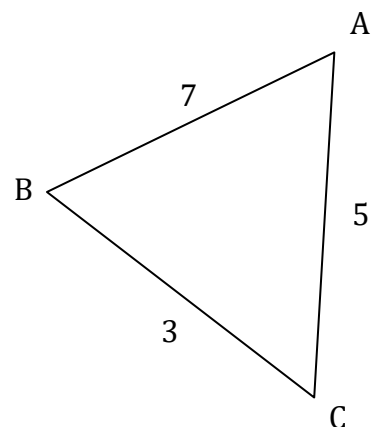
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{BC}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (5^2 - 7^2 - 3^2)$$

$$= \frac{1}{2} (25 - 49 - 9)$$

$$= \frac{-33}{2} = -16,5$$



Remarques : 1. Il faut que $\vec{u} + \vec{v}$ se réduise avec Chasles...

Sinon, utiliser la même astuce que dans le paragraphe précédent !

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{-1}{2} (\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2) \\ &= \frac{-1}{2} (BC^2 - AB^2 - AC^2)\end{aligned}$$

2. Il existe deux autres formules de polarisation, mais la 1^{ère} suffit à se sortir de toutes les situations.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

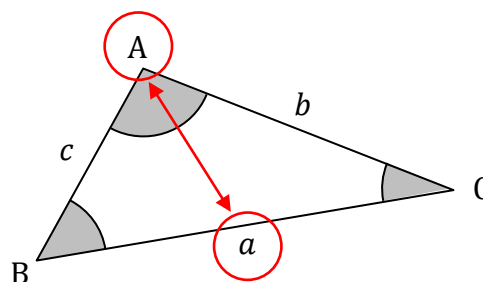
III Le théorème d'Al Kashi

Théorème : Quel que soit le triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



⇒ Ce théorème est également connu sous le nom de « *Pythagore généralisé* ».

En effet, si ABC est rectangle en A, alors $\cos \hat{A} = 0$ et le théorème devient $a^2 = b^2 + c^2$

Et Pythagore est né grosso modo en 580 av J-C, alors qu'Al Kashi est né en 1380.

Preuve : On va utiliser les deux expressions du produit scalaire.

$$\begin{aligned}\text{D'une part, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= c \times b \times \cos \hat{A} = bc \cos \hat{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'autre part, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ &= \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)\end{aligned}$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = a^2$$

Ex 1 : Soit TIC un triangle tel que $TC = 3$, $TI = 6$ et $IC = 4$.
Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{TIC}$ au centième de degré.

D'après le théorème d'Al-Kashi :

$$TC^2 = TI^2 + IC^2 - 2 \times TI \times IC \times \cos \widehat{TIC}$$

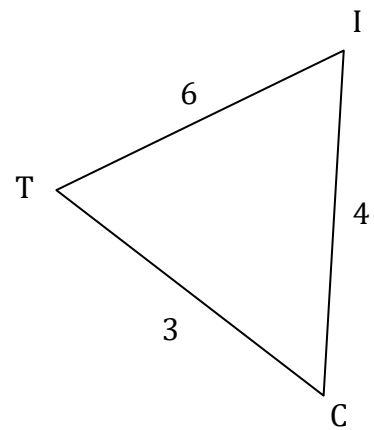
$$3^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \widehat{TIC}$$

$$9 = 36 + 16 - 48 \cos \widehat{TIC}$$

$$9 - 36 - 16 = -48 \cos \widehat{TIC}$$

$$\frac{-43}{-48} = \cos \widehat{TIC}$$

$$\widehat{TIC} = \cos^{-1} \left(\frac{43}{48} \right) \approx 26,38^\circ$$



Ex 2 : Soit TAC un triangle tel que $TA = 6$, $TC = 8$ et $\widehat{CTA} = \frac{\pi}{3}$
Calculer AC au dixième près.

D'après le théorème d'Al-Kashi :

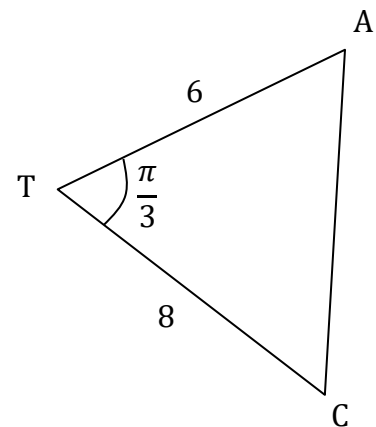
$$AC^2 = TA^2 + TC^2 - 2 \times TA \times TC \times \cos \widehat{CTA}$$

$$= 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 36 + 64 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 52$$

$$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,2$$



Et à partir de là, on pourrait calculer les autres angles.

Ex 3 : Soit TOC un triangle tel que $TO = 6$, $OC = 14$ et $\widehat{CTO} = \frac{\pi}{3}$
Calculer TC au dixième près.

D'après le théorème d'Al-Kashi :

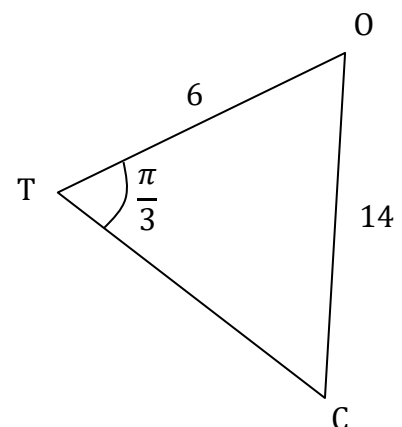
$$OC^2 = TO^2 + TC^2 - 2 \times TO \times TC \times \cos \widehat{CTO}$$

$$14^2 = 6^2 + TC^2 - 2 \times 6 \times TC \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$196 = 36 + TC^2 - 12 \times TC \times 0,5$$

$$0 = 36 + TC^2 - 6TC - 196$$

$$TC^2 - 6TC - 160 = 0$$



On est donc ramenés à une équation du 2nd degré : $x^2 - 6x - 160 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-160)$$

$$= 36 + 640$$

$$= 676$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{676}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6 - 26}{2}$$

$$= \frac{-20}{2} = -10$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{676}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6 + 26}{2}$$

$$= \frac{32}{2} = 16$$

D'où TC = 16

- Remarques : 1. On aurait très bien pu arriver à $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. Le problème aurait alors eu deux solutions...
2. Si l'on connaît la longueur d'un seul côté et les mesures de deux angles, alors on devrait pouvoir calculer les longueurs des autres côtés ! Mais il nous manque encore un outil : la loi des sinus... qui n'est hélas pas au programme.
- Avec les mêmes notations que pour Al-Kashi, cela donne :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$