

TRIGONOMÉTRIE

2^{ème} partie

I Cosinus et sinus d'un angle orienté

1° Définitions et propriétés

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ associé au repère orthonormé (O, I, J) .

Définition : Soit x un réel quelconque et M le point de $\mathcal{C}$ associé à x .

Autrement dit, $(\vec{OI}, \vec{OM}) = x \text{ rad}$.

On appelle cosinus de x et on note $\cos x$ l'abscisse du point M .

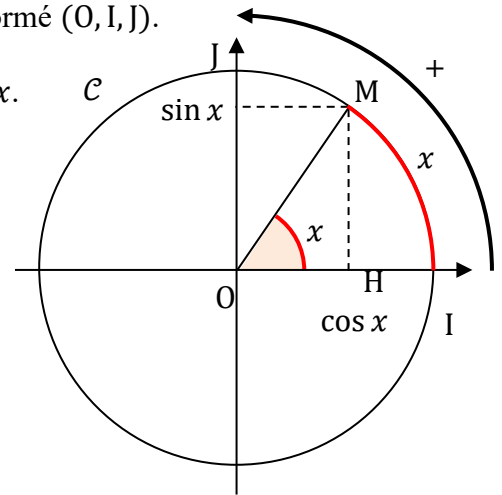
On appelle sinus de x et on note $\sin x$ l'ordonnée du point M .

Ainsi, M a pour coordonnées $(\cos x ; \sin x)$.

« Et CAH SOH TOA, ça fonctionne toujours ? »

Plaçons-nous dans le triangle rectangle OHM :

$$\cos x = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM$$



Propriétés : Pour tout réel x , on a :

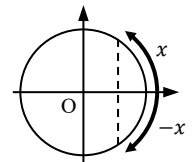
1. $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (sachant que $\cos^2 x = (\cos x)^2$)
3. $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos(x)$
4. $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Preuves : 1. Cela vient tout simplement du fait que le rayon de $\mathcal{C}$ est égal à 1.

2. C'est le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle OHM

3. « x » et « $-x$ » sont symétriques par rapport à l'axe (Ox)

4. « $2k\pi$ » correspond à k tours complets : $x + 2k\pi$ correspond donc au même point du cercle que x .



Ex : Déterminer la valeur de $\sin x$ sachant que $\cos x = 0,4$ et que $x \in [\pi ; 2\pi[$

On a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$0,4^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - 0,4^2 = 0,84$$

$$\sin x = \sqrt{0,84} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\sqrt{0,84}$$

Or, $x \in [\pi ; 2\pi[$ donc $\sin x < 0$. D'où $\sin x = -\sqrt{0,84}$

2° Valeurs remarquables

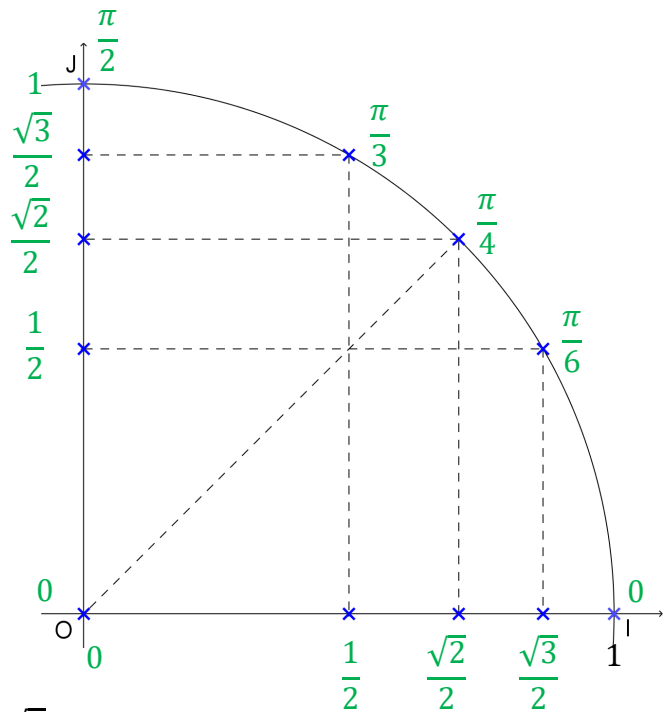
Les principaux angles dont on connaît les valeurs du sinus et du cosinus sont :

$$0 < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

Et les valeurs remarquables de ces sinus et de ces cosinus sont :

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

D'où le repérage sur le cercle trigonométrique :



Preuve : Démontrons que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).

Le triangle MOI est isocèle en O car $OM = OI = 1$

Donc $\widehat{OMI} = \widehat{OIM}$

A
U

P
R
O
G
R
A
M
M
E

Or, $\widehat{OMI} + \widehat{OIM} + \widehat{MOI} = 180^\circ$

$$\widehat{OMI} + \widehat{OMI} + 60 = 180$$

$$2\widehat{OMI} = 180 - 60$$

$$\widehat{OMI} = \frac{120}{2} = 60$$

Le triangle MOI est donc équilatéral.

Par conséquent, H est le milieu de [OI] et donc $x_H = \frac{1}{2}$

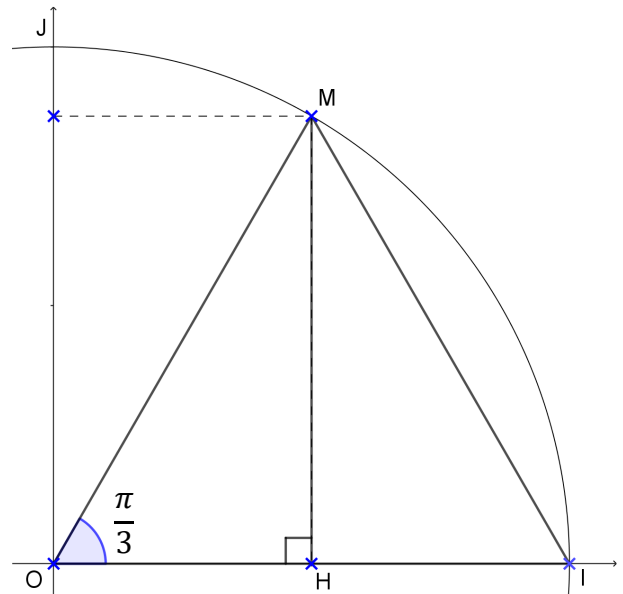
Or, $x_M = x_H$ c'est-à-dire $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

De plus, $\left(\cos \frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Or $\sin \frac{\pi}{3} > 0$ donc $\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Preuve : Montrons que $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).

$$\widehat{OMH} + \widehat{OHM} + \widehat{MOH} = 180^\circ$$

$$\widehat{OMH} + 90 + 45 = 180$$

$$\widehat{OMH} = 180 - 45 - 90 = 45^\circ$$

Le triangle MOH est donc isocèle en H.

Autrement dit, $HO = HM$ c'est-à-dire $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\text{De plus, } \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$$

$$2 \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } \sin \frac{\pi}{4} > 0 \text{ donc } \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En résumé :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3° Cosinus et sinus d'angles associés

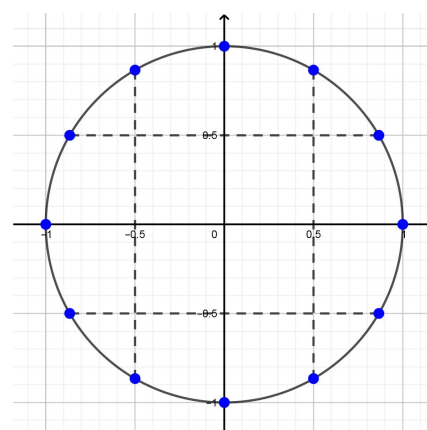
Par lecture sur le cercle, il est possible de déterminer les valeurs des sinus et cosinus d'autres angles.

Par exemple, on sait que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{-5\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

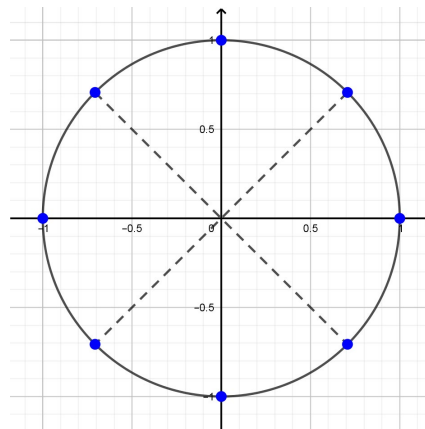


Et que vaut $\cos \frac{189\pi}{4}$?

On a $189 = 23 \times 8 + 5$

$$\frac{189\pi}{4} = 23 \times \frac{8\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = 23 \times 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$\text{D'où } \cos \frac{189\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$



II Fonctions cosinus et sinus

1° Propriétés

Périodicité : on a vu que $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques, de période 2π** . (ou bien qu'elles sont **2π -périodiques**)

Cela signifie donc que les valeurs de la fonction **ne changent pas lorsqu'on ajoute 2π à x** .

⇒ Graphiquement, leurs courbes représentatives **se répètent donc sur un intervalle de longueur 2π** : il suffit donc de les tracer sur **un intervalle de longueur 2π** puis de compléter par **des translations (des copier-coller)**

Parité : on a vu que $\cos(-x) = \cos x$

et que $\sin(-x) = -\sin(x)$

On dit que la fonction cosinus est **paire**.

Cela signifie que **remplacer x par $-x$ ne change rien aux valeurs de la fonction**.

⇒ Graphiquement, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** dans un repère orthogonal.

On dit que la fonction sinus est **impaire**.

Cela signifie que **remplacer x par $-x$ change le signe des valeurs de la fonction**.

⇒ Graphiquement, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine** dans un repère orthogonal.

2° Représentations graphiques

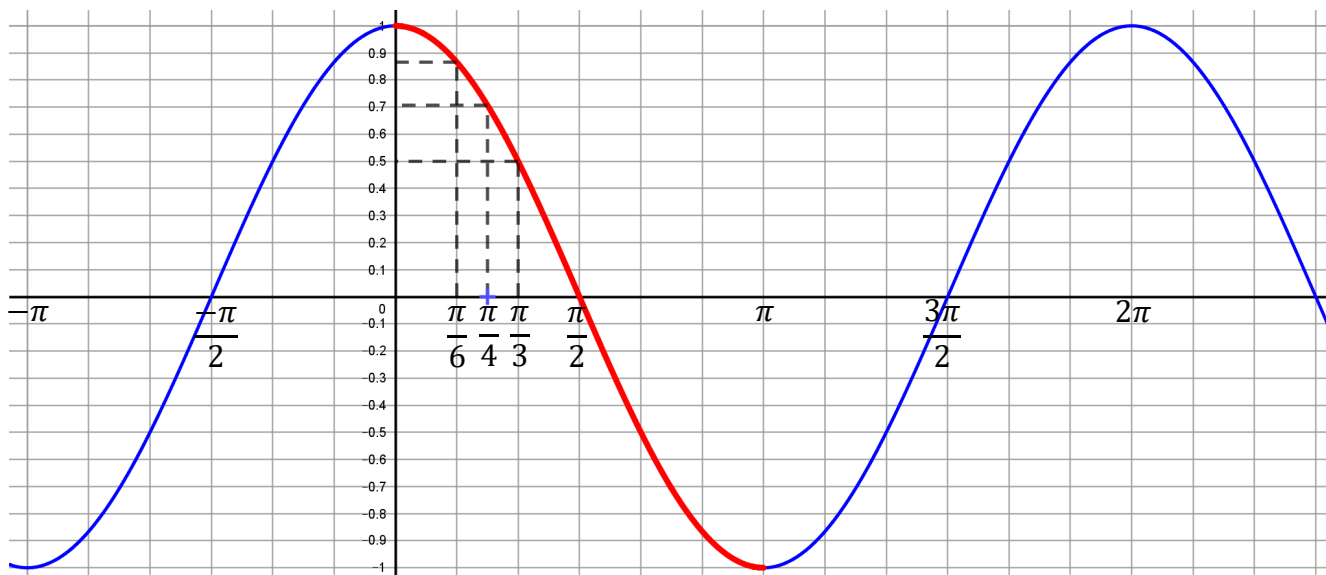
Les fonctions sinus cosinus étant 2π -périodiques, on peut limiter leur étude à **un intervalle de longueur 2π comme par exemple $[-\pi ; \pi]$** .

Mais en utilisant leur parité / imparité, on peut limiter l'étude à **$[0 ; \pi]$ puis compléter par symétrie par rapport à l'origine ou à l'axe des ordonnées**.

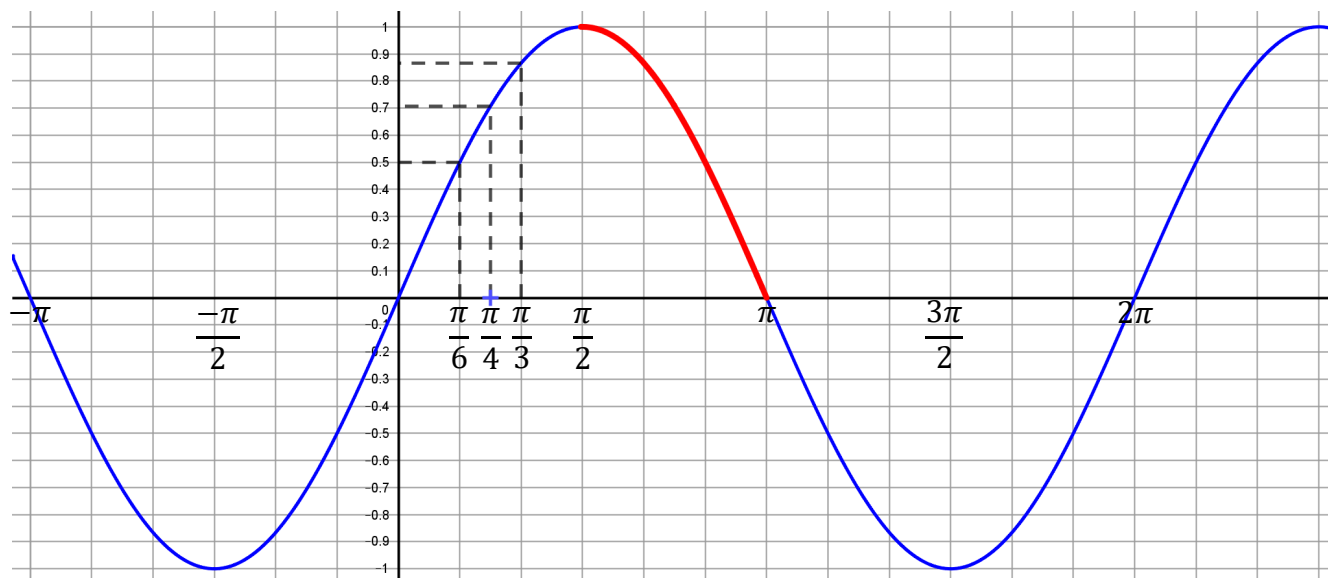
On commence par placer certains points particuliers.

Pour information, $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$

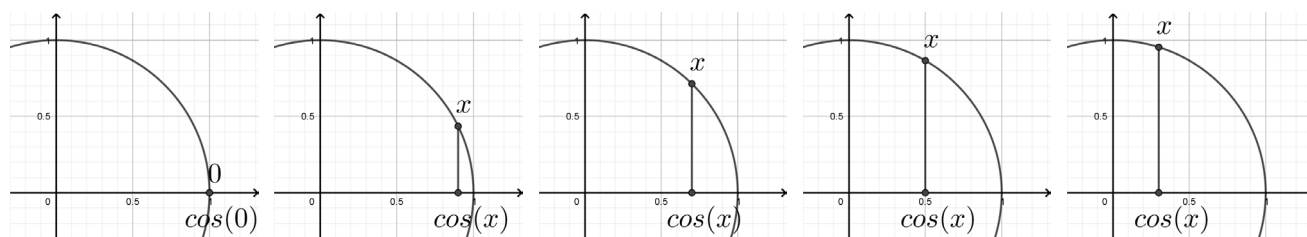
Fonction cosinus :



Fonction sinus :



Remarques : 1. On peut lire le sens de variation de ces fonctions sur le cercle trigonométrique :



Lorsque les valeurs de x augmentent de 0 à $\frac{\pi}{2}$ par exemple, on peut voir que les valeurs de $\cos x$ sont **décroissantes**.

2. Les courbes de sinus et cosinus sont **les mêmes, avec un décalage de $\frac{\pi}{2}$**