

SUITES NUMÉRIQUES

2^{ème} partie

I Suites arithmétiques

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose le contrat suivant : un loyer de 450 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
Quel montant total aura-t-il dépensé à la fin de ses trois années de location ?

1° Forme récurrente

On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

Le nombre r est appelé « raison » de la suite.

Autrement dit, une suite arithmétique est une suite récurrente pour laquelle le terme suivant s'obtient en ajoutant toujours la même valeur au terme précédent.

Remarques : 1) Puisqu'il s'agit d'une suite récurrente, on a besoin de la valeur du 1^{er} terme...

2) Si la raison vaut 0, la suite est constante.

Ex : L'exemple d'introduction correspond à une suite arithmétique de raison 5 : si on note u_n le loyer du $n^{\text{ème}}$ mois, on a en effet $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_1 = 450$.

Propriété : une suite est arithmétique si et seulement si la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et cette constante sera alors la raison de la suite)

Ex : Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = 3n - 2$ et $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces suites sont-elles arithmétiques ?

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n - 2)$$

$$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$$

$$= 3$$

(u_n) est arithmétique de raison 3

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n^2$$

$$= 2n + 1$$

(v_n) n'est pas arithmétique car $2n + 1$ n'est pas constant...

Sens de variation : soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

Si $r > 0$, la suite est croissante.

Si $r < 0$, la suite est décroissante

Si $r = 0$, la suite est constante

2° Forme explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_p et de raison r .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n - p)r$

Deux cas particuliers classiques : $u_n = u_0 + nr$

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Preuve : Effectuons la preuve dans le cas où le 1^{er} terme est u_0 . On a :

$$u_1 = u_0 + r$$

$$u_2 = u_1 + r$$

$$u_3 = u_2 + r$$

...

$$u_n = u_{n-1} + r$$

On additionne ces n égalités membre à membre :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + n \times r$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n - u_1 - u_2 - \dots - u_{n-1} = u_0 + n \times r$$

D'où $u_n = u_0 + nr$

Ex : Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 45$ et de raison -3 .

1. Calculer u_{18} .
2. Quel est le rang du terme dont la valeur est -174 ?

1. On a $u_n = u_0 + nr$

$$u_{18} = 45 - 3 \times 18$$

$$= 45 - 54$$

$$= -9$$

2. On a $u_n = u_0 + nr$

$$-174 = 45 - 3n$$

$$-174 - 45 = -3n$$

$$-219 = -3n$$

$$\frac{-219}{-3} = n$$

$$73 = n$$

Donc $u_{73} = -174$

Ex : Reprenons l'exemple d'introduction : un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose le contrat suivant : un loyer de 450 € pour le premier mois, puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail. Combien paiera-t-il le dernier mois de son bail ?

Si on note u_n le loyer du $n^{\text{ème}}$ mois, on a $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_1 = 450$.

On peut en déduire que $u_n = u_1 + (n - 1)r$

$$= 450 + (n - 1) \times 5$$

$$= 450 + 5n - 5$$

$$= 445 + 5n$$

Ainsi, le dernier loyer de l'étudiant sera $u_{36} = 445 + 5 \times 36$

$$= 625 \text{ €}$$

Méthode : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_{13} = 7$ et $u_{25} = 25$. Déterminer sa raison.

On sait que $u_n = u_p + (n - p)r$

$$u_{25} = u_{13} + (25 - 13)r$$

$$25 = 7 + 12r$$

$$25 - 7 = 12r$$

$$18 = 12r$$

$$\frac{18}{12} = r = 1,5$$

3° Somme des termes consécutifs

On note $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$

Cela se lit « Somme (ou sigma) pour i allant de 0 à n des u_i ».

Cela signifie que l'on remplace successivement i par 0 (ce qui fait u_0) puis par 1 (ce qui fait u_1), puis par 2 (ce qui fait u_2), etc... jusqu'à n (ce qui fait u_n)

Ex : dans notre exemple d'introduction, avec $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_1 = 450$, si l'on veut calculer le montant total dépensé par l'étudiant, il faut donc faire :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{36} = \sum_{i=1}^{36} u_i$$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

⇒ Il s'agit de la somme des termes successifs de la suite arithmétique de 1^{er} terme 1 et de raison 1.

Preuve : $S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$

$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

On additionne membre à membre :

$$S + S = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ex : $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50(50+1)}{2}$

$$= 25 \times 51 = 1\,275$$

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique.

La somme des termes successifs de cette suite vaut :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Ex : Revenons vers notre étudiant... Son 1^{er} loyer vaut $u_1 = 450$ € et son dernier loyer est $u_{36} = 625$ €.

La somme de ses 36 loyers fera donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{36} u_i &= \frac{36(450 + 625)}{2} \\ &= \frac{36 \times 1\,075}{2} \\ &= 19\,350 \text{ €} \end{aligned}$$

Ex : Calculer $S = 2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 2\,279$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 3$.

On a alors $u_n = 2 + 3n$

$$2\,279 = 2 + 3n$$

$$2\,279 - 2 = +3n$$

$$\frac{2\,277}{3} = n$$

Autrement dit, $2\,279 = u_{759}$.

D'où $S = 760 \times \frac{2 + 2\,279}{2} = 866\,780$

II Suites géométriques

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose le contrat suivant : un loyer de 375 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail.
Quel montant total aura-t-il dépensé à la fin de ses trois années de location ?

1° Forme récurrente

On appelle suite géométrique toute suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

Le nombre q est appelé « raison » de la suite.

Autrement dit, une suite géométrique est une suite récurrente pour laquelle le terme suivant s'obtient en multipliant le terme précédent toujours par la même valeur.

Remarques : 1) Puisqu'il s'agit d'une suite récurrente, on a besoin de la valeur du 1^{er} terme... Et si ce 1^{er} terme vaut 0, tous les autres termes de la suite valent 0 !

2) Si la raison vaut 0, tous les termes à partir du second terme sont nuls. Et si la raison vaut 1, la suite est constante.

Ex : L'exemple d'introduction correspond à une suite géométrique de raison 1,02 : si on note u_n le loyer du $n^{\text{ème}}$ mois, on a en effet $u_{n+1} = 1,02u_n$ et $u_1 = 375$.

Propriété : une suite est géométrique si et seulement si le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant pour tout $n \in \mathbb{N}$

(et cette constante sera alors la raison de la suite)

Ex : Les suites définies par $u_n = 4 \times 3^n$ et $v_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont-elles géométriques ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n}$$

$$= 3^{n+1-n} = 3$$

(u_n) est géométrique de raison 3

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

(v_n) n'est pas géométrique

Sens de variation : soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$.

Lorsque le 1^{er} terme est positif : si $q > 1$, la suite est croissante

si $0 < q < 1$, la suite est décroissante

si $q = 1$, la suite est constante

Et lorsque le 1^{er} terme est négatif, c'est le contraire : si $q > 1$, la suite est décroissante et si $0 < q < 1$, la suite est croissante.

2° Forme explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_p et de raison q .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Deux cas particuliers classiques : $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Preuve : Effectuons la preuve dans le cas où le 1^{er} terme est u_0 . On a :

$$u_1 = q \times u_0$$

$$u_2 = q \times u_1$$

$$u_3 = q \times u_2$$

...

$$u_n = q \times u_{n-1}$$

On multiplie ces n égalités membre à membre :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times q^n$$

Si $u_0 = 0$ ou $q = 0$ alors tous les termes sont nuls et la propriété est évidente.

Et sinon, $\frac{u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_n}{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1}} = u_0 \times q^n$

D'où $u_n = u_0 \times q^n$

Ex : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison 3. Calculer u_{10} .

On a $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_{10} = 7 \times 3^{10}$$

$$= 413\,343$$

Ex : Reprenons l'exemple d'introduction : un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose le contrat suivant : un loyer de 375 € pour le premier mois, puis une augmentation de 2% par mois jusqu'à la fin du bail. Combien paiera-t-il le dernier mois de son bail ?

Si on note u_n le loyer du $n^{\text{ème}}$ mois, on a $u_{n+1} = 1,02u_n$ et $u_1 = 375$.

On peut en déduire que $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

$$= 375 \times 1,02^{n-1}$$

Ainsi, le dernier loyer de l'étudiant sera $u_{36} = 375 \times 1,02^{36-1}$

$$\approx 749,96 \text{ €}$$

3° Somme des termes consécutifs

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$. On a $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Preuve : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

A
U

P
R
O
G
R
A
M
M
E

$$q \times S = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

On soustrait membre à membre :

$$S - q \times S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1})$$
$$S - q \times S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q - q^2 - q^3 - \dots - q^{n+1}$$
$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Ex : Calculer la somme suivante :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 1\,024 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$$
$$= \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2}$$
$$= \frac{1 - 2\,048}{-1}$$
$$= 2\,047$$

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

La somme des termes successifs de cette suite vaut :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Remarque : si $q = 1$ la suite est **constante**.

La somme des termes successifs vaut alors « **nombre de termes** $\times$ **1^{er} terme** ».

Ex : Revenons vers notre étudiant... Son 1^{er} loyer vaut $u_1 = 375$ € et la raison de la suite des loyers est $q = 1,02$.

La somme de ses **36** loyers fera donc :

$$\sum_{i=1}^{36} u_i = 375 \times \frac{1 - 1,02^{36}}{1 - 1,02}$$
$$\approx 19\,497,89 \text{ €}$$

III Suites arithmético-géométriques

Étudions un exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = 3u_n - 8$ et $u_0 = 6$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. On pose $v_n = u_n - 4$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique.
 - b. Donner l'expression explicite de v_n .
 - c. En déduire l'expression explicite de u_n .

$\begin{aligned} 1. \quad u_1 &= 3u_0 - 8 \\ &= 3 \times 6 - 8 \\ &= 18 - 8 \\ &= 10 \end{aligned}$	$\begin{aligned} u_2 &= 3u_1 - 8 \\ &= 3 \times 10 - 8 \\ &= 30 - 8 \\ &= 22 \end{aligned}$	$\begin{aligned} u_3 &= 3u_2 - 8 \\ &= 3 \times 22 - 8 \\ &= 66 - 8 \\ &= 58 \end{aligned}$
---	---	---

2. a. On utilise la « méthode 2 - 1 - 2 »

L'énoncé donne deux formules :

M
É
T
H
O
D
E

$$\begin{cases} (1) \quad u_{n+1} = 3u_n - 8 \\ (2) \quad v_n = u_n - 4 \text{ qui peut aussi s'écrire } v_n + 4 = u_n \end{cases}$$

Théoriquement, pour montrer que (v_n) est géométrique, on forme le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$

Mais de manière pratique, pour alléger l'écriture, nous allons montrer que $v_{n+1} = \dots \times v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \quad (2) \\ &= 3u_n - 8 - 4 \quad (1) \\ &= 3(v_n + 4) - 8 - 4 \quad (2) \\ &= 3v_n + 12 - 8 - 4 \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3.

b. On a $v_0 = u_0 - 4$

$$= 6 - 4 = 2$$

D'où $v_n = v_0 \times q^n$

$$= 2 \times 3^n$$

c. On en déduit que $u_n = v_n + 4$

$$= 2 \times 3^n + 4$$

Vérification : $u_3 = 2 \times 3^3 + 4 = 2 \times 27 + 4 = 58$

COMPLÉMENT

Soit (u_n) une suite arithmétique.

La somme des termes successifs de cette suite vaut :

$$S = \frac{\text{nombre de termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Prouvons-le dans le cas où le premier terme est u_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + \underbrace{u_1}_{u_0 + 1r} + \underbrace{u_2}_{u_0 + 2r} + \dots + \underbrace{u_n}_{u_0 + nr} \\ &= u_0 + (u_0 + 1r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r \underbrace{(1 + 2 + \dots + n)}_{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2(n+1)u_0 + rn(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2u_0 + rn)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2} \end{aligned}$$

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

La somme des termes successifs de cette suite vaut :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Prouvons-le dans le cas où le premier terme est u_0 :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + \underbrace{u_1}_{u_0 \times q^1} + \underbrace{u_2}_{u_0 \times q^2} + \dots + \underbrace{u_n}_{u_0 \times q^n} \\ &= u_0 \times 1 + (u_0 \times q^1) + (u_0 \times q^2) + \dots + (u_0 \times q^n) \\ &= u_0 \underbrace{(1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n)}_{\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}} \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$