

DÉRIVATION

3^{ème} partie

I Etude des variations d'une fonction

Lorsqu'une fonction est croissante sur un intervalle I , les tangentes à sa courbe représentative sont des droites dont les coefficients directeurs sont positifs.

Or, on sait que le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est $f'(a)$. D'où :

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

$$f \text{ est croissante sur } I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \text{ sur } I$$

$$f \text{ est décroissante sur } I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \text{ sur } I$$

Vérifions la cohérence de ce résultat avec l'étude d'une fonction du 2nd degré.

Ex 1 : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^2 + x + 4$.

$$f'(x) = -0,5 \times 2x + 1$$

$$= -x + 1$$

Déterminons le signe de $f'(x)$:

$$-x + 1 = 0$$

$$1 = x$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

⇒ On retrouve ce que l'on savait : $a = -0,5 < 0$ donc la parabole est concave.

$$\text{Et son sommet a pour coordonnées } (\alpha ; \beta) \text{ où } \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \times (-0,5)} = 1$$

Ex 2 : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x - 9$$

$$= 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$$

Déterminons le signe de $f'(x)$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3)$$

$$= 4 + 12$$

$$= 16$$

$$x_1 = \frac{2 - 4}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

et

$$x_2 = \frac{2 + 4}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6}{2} = 3$$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$		10	-22	

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times (-1) + 5 & f(3) &= 3^3 - 3 \times 3^2 - 9 \times 3 + 5 \\
 &= -1 - 3 \times 1 + 9 + 5 & &= 27 - 3 \times 9 - 27 + 5 \\
 &= 10 & &= -22
 \end{aligned}$$

$$f(-3) = -22$$

$$f(-2) = 3$$

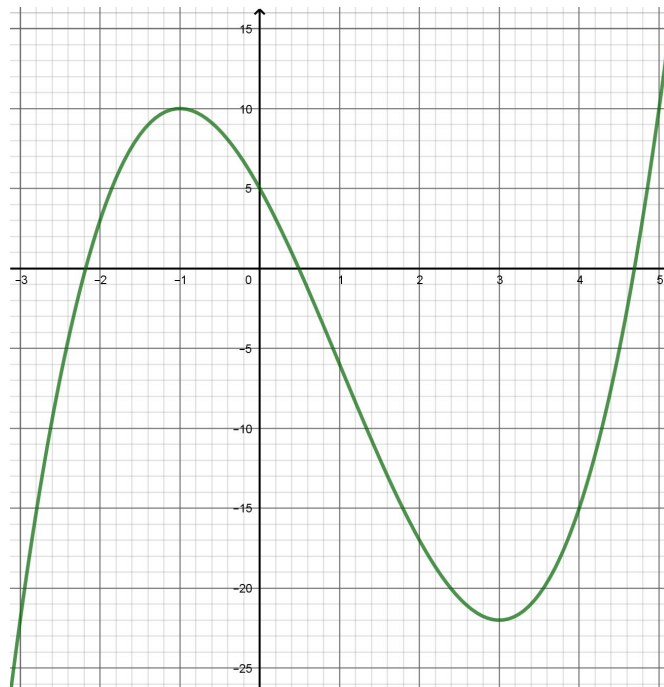
$$f(0) = 5$$

$$f(1) = -6$$

$$f(2) = -17$$

$$f(4) = -15$$

$$f(5) = 10$$



II Extremum d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que M est le maximum de f sur I signifie que $\begin{cases} f(x) \leq M \text{ pour tout } x \in I \\ \text{il existe } c \in I \text{ tel que } f(c) = M \end{cases}$

Dire que m est le minimum de f sur I signifie que $\begin{cases} f(x) \geq m \text{ pour tout } x \in I \\ \text{il existe } c \in I \text{ tel que } f(c) = m \end{cases}$

Un extremum est un maximum *ou* un minimum.

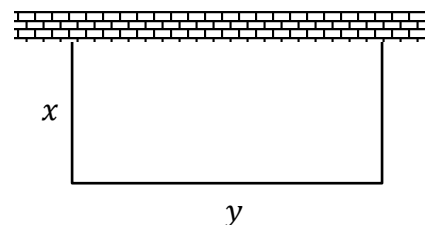
On parle d'extremum **global** lorsque l'étude est menée sur l'ensemble de définition de f .

Et si l'on choisit de se limiter à un intervalle plus petit, on parle alors d'extremum **local**.

Généralement, on étudie les variations d'une fonction pour en déterminer les éventuels extrema.

⇒ La recherche d'extrema est notamment utile dans les problèmes dits d'optimisation.

Ex : Pour respecter les normes qui lui sont imposées, une agricultrice doit construire un enclos rectangulaire de $1\,800\text{ m}^2$.
L'un des côtés de cet enclos sera constitué d'un mur déjà existant.
Quelle longueur minimale de grillage est nécessaire pour réaliser cet enclos ? Et quelles seront alors ses dimensions ?



On sait que $x \times y = 1\,800$.

Et si on note $f(x)$ la longueur de grillage nécessaire, $f(x) = 2x + y$

$$= 2x + \frac{1\,800}{x}$$

$$= \frac{2x^2 + 1\,800}{x}$$

Etudions cette fonction :

$$f'(x) = \frac{4x \times x - 1(2x^2 + 1\,800)}{x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 2x^2 - 1\,800}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 1\,800}{x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 - 900)}{x^2}$$

$f'(x)$ est du signe de $x^2 - 900$ car $x^2 > 0$ et $2 > 0$.

Or, $x^2 - 900 = 0$ si $x = \sqrt{900} = 30$ ou $x = -\sqrt{900} = -30$.

x	0	30	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$$f(30) = \frac{2 \times 30^2 + 1\,800}{30}$$

$$= \frac{1\,800 + 1\,800}{30}$$

$$= \frac{3\,600}{30} = 120$$

Il lui faudra donc au minimum **120 m** de grillage.

L'enclos mesurera alors **30 m sur 60 m**.

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert (*c'est-à-dire ouvert en ses deux extrémités*)

Si f' s'annule et change de signe en un réel $c \in I$, alors f admet un extremum en c .



Il ne suffit pas que la dérivée s'annule : il FAUT qu'elle change de signe !

La fonction $f(x) = x^3$ est un très bon contre-exemple...

III Position relative de deux courbes

Etudier la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g , c'est déterminer

quand est-ce que l'une est au-dessus ou en dessous de l'autre.

Pour ce faire, on va étudier le signe de la différence $g(x) - f(x)$:

- Si $g(x) - f(x) \geq 0$ alors $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$
- Si $g(x) - f(x) \leq 0$ alors $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$

Autrement dit, cela revient à faire une étude de signe... Toutefois, lorsque l'étude de signe n'est pas accessible, on peut étudier plus globalement les variations de l'expression $g(x) - f(x)$.

Ex : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 4$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et $\mathcal{T}$ sa tangente en 1. Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}$.

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -9 \times 3x^2 + 27 \times 2x \\ &= -27x^2 + 54x \end{aligned}$$

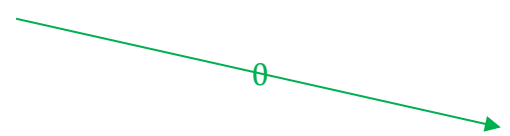
$$\text{D'où } f'(1) = -27 \times 1^2 + 54 \times 1 = 27$$

$$\text{Par ailleurs, } f(1) = -9 \times 1^3 + 27 \times 1^2 + 4 = 22$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathcal{T} : y &= 27(x - 1) + 22 \\ &= 27x - 27 + 22 \\ &= 27x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Notons } h(x) &= f(x) - y = -9x^3 + 27x^2 + 4 - (27x - 5) \\ &= -9x^3 + 27x^2 + 4 - 27x + 5 \\ &= -9x^3 + 27x^2 - 27x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -9 \times 3x^2 + 27 \times 2x - 27 \\ &= -27x^2 + 54x - 27 \\ &= -27(x^2 - 2x + 1) \\ &= -27(x - 1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	-
$h(x)$			
$h(x)$	+	0	-

Autrement dit, si $x \leq 1$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{T}$.

Et si $x \geq 1$, $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{T}$.