

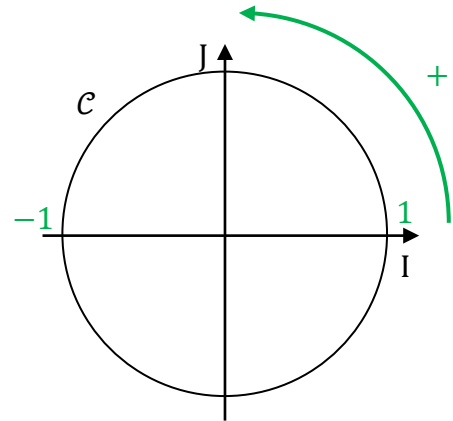
TRIGONOMÉTRIE

1^{ère} partie

I Cercle trigonométrique et radians

On se place dans un repère orthonormé (O, I, J) .

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 , orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est ce qu'on appelle le « sens direct »)



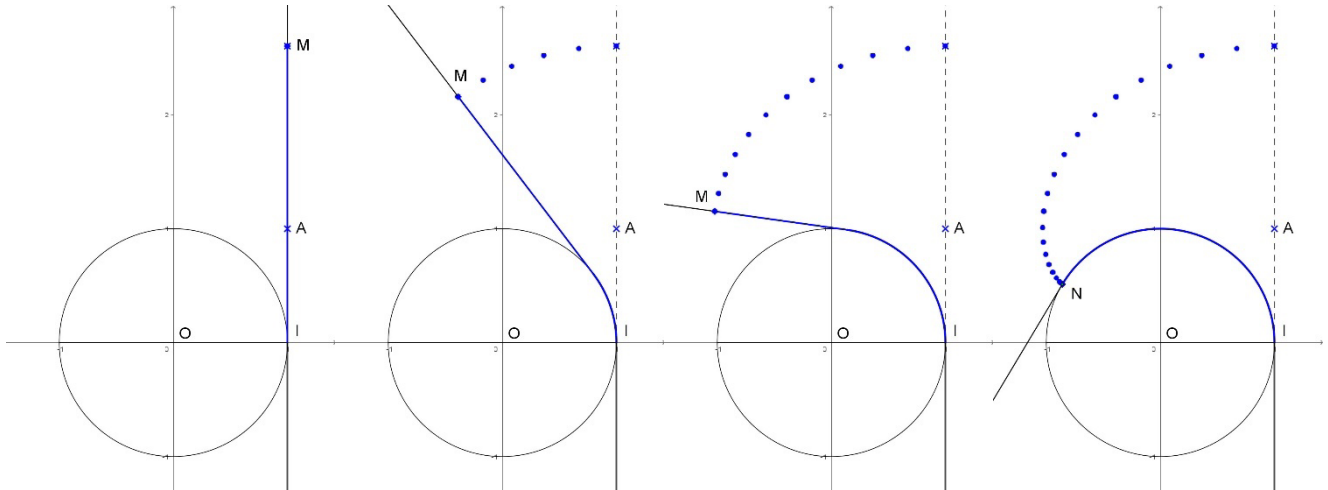
On sait se repérer sur une droite graduée, c'est-à-dire une droite avec une origine et une unité.

Une manière de se repérer sur le cercle trigonométrique consiste alors à enrouler autour de ce cercle une droite graduée.

Considérons donc la tangente à $\mathcal{C}$ passant par I : on la munit d'un repère dont l'origine est I et dont l'unité est représentée par le point $A(1; 1)$.

Lorsqu'on « enroule » cette droite autour du cercle $\mathcal{C}$, la demi-droite $[IA)$ s'enroule dans le sens direct.

Et à tout point M de cette droite graduée correspond un unique point N du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$:



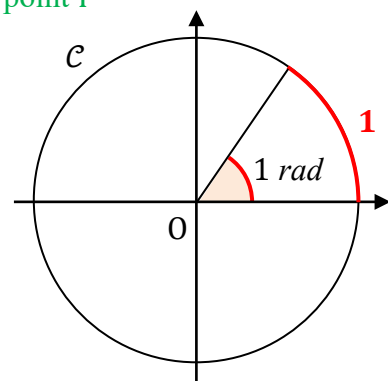
La longueur de l'arc de cercle $\widehat{IN}$ est donc égale à la longueur du segment $[AM]$.



Par ce procédé, l'origine du cercle trigonométrique est donc le point I

Ce procédé permet également de définir une nouvelle unité de mesure des angles.

Définition : on appelle **radian**, noté **rad**, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de cercle de longueur 1 .



Le cercle trigonométrique a pour périmètre $\mathcal{P} = 2\pi$.

Ainsi, un tour complet du cercle correspond au nombre 2π de la droite graduée.

Et sachant qu'un tour complet correspond à 360° , on a alors la correspondance suivante :

Degrés	0	30	45	60	90	180	360
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Ex : convertir 42° en radians.

$$\begin{aligned} 42^\circ &= \frac{42 \times 2\pi}{360} \\ &= \frac{6 \times 7 \times 2\pi}{12 \times 30} \\ &= \frac{7\pi}{30} \text{ rad} \end{aligned}$$

Convertir $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ en degrés

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{12} \text{ rad} &= \frac{5\pi \times 360}{12 \times 2\pi} \\ &= \frac{5 \times 12 \times 15 \times 2}{12 \times 2} \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

II Placement d'un point sur le cercle

1° Valeurs remarquables

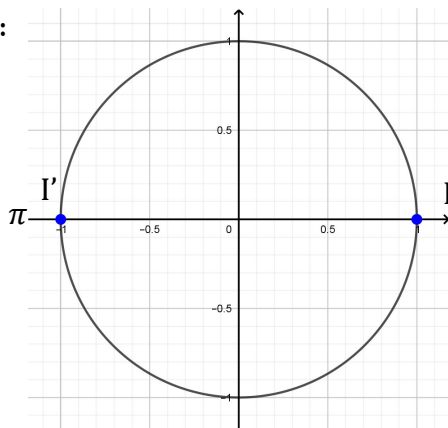
A partir de la mesure en radians d'un angle, on cherche à placer le point du cercle trigonométrique correspondant.

On parle en fait ici de la mesure d'un angle **orienté** : selon le **sens** dans lequel on tourne, on peut en

effet avoir par exemple un angle de $\frac{\pi}{3}$ ou de $-\frac{\pi}{3}$.

Plus précisément, on cherche donc à placer un point M sur le cercle trigonométrique, sachant que la mesure de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ (également noté $(\vec{i}, \vec{OM})$) est connue.

Multiples de π :



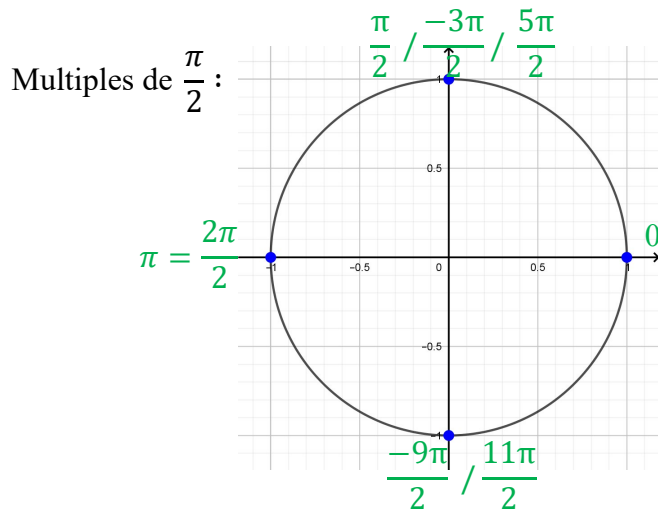
Un angle dont la mesure est π correspond à un **demi-cercle**.

Ainsi, un angle dont la mesure est $k\pi$ donnera comme point du cercle :

- I si k est pair
- I' si k est impair

Remarque : la valeur π est un point de repère essentiel sur le cercle trigonométrique.

$$\text{En effet, } \pi = \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{3} = \frac{4\pi}{4} = \frac{6\pi}{6}$$



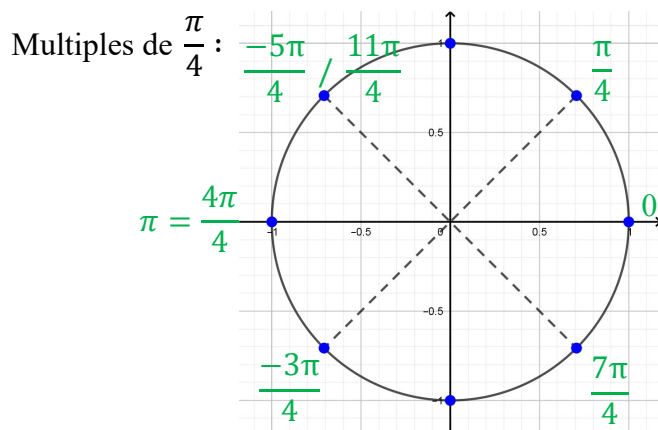
A partir du repère $\pi = \frac{2\pi}{2}$, on positionne $\frac{\pi}{2}$

à la moitié du demi-cercle π .

On peut alors graduer régulièrement le cercle pour visualiser les multiples de $\frac{\pi}{2}$

Ex : Placer les points du cercle correspondant à :

$$\frac{-3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{2} \quad \frac{-9\pi}{2} \quad \frac{11\pi}{2}$$



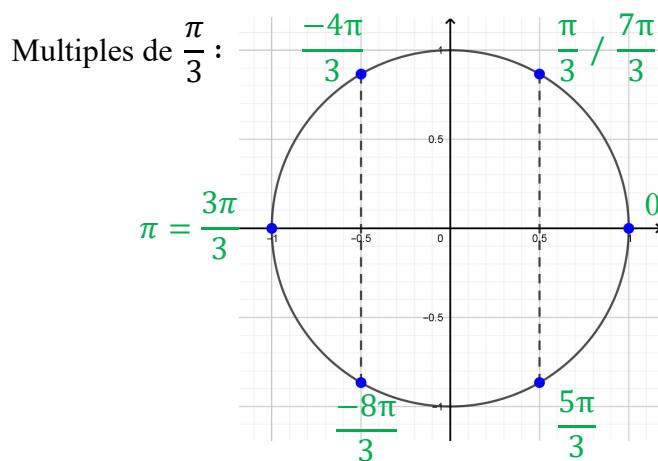
A partir du repère $\pi = \frac{4\pi}{4}$, on positionne $\frac{\pi}{4}$

au quart du demi-cercle π .

On peut alors graduer régulièrement le cercle pour visualiser les multiples de $\frac{\pi}{4}$

Ex : Placer les points du cercle correspondant à :

$$\frac{-3\pi}{4} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{-5\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{4}$$



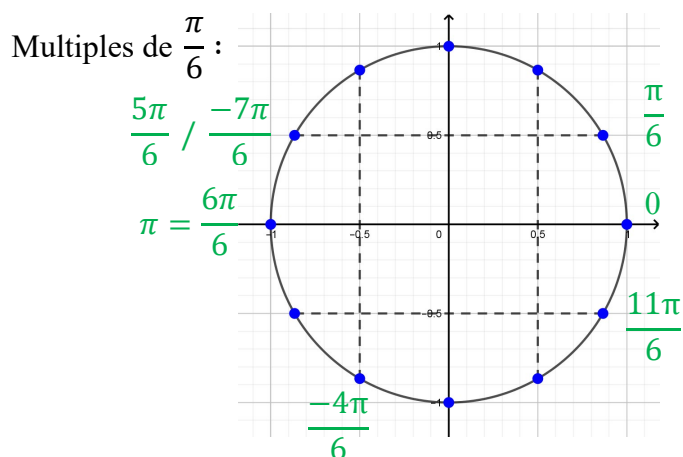
A partir du repère $\pi = \frac{3\pi}{3}$, on positionne $\frac{\pi}{3}$

au tiers du demi-cercle π .

On peut alors graduer régulièrement le cercle pour visualiser les multiples de $\frac{\pi}{3}$

Ex : Placer les points du cercle correspondant à :

$$\frac{-4\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{-8\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{3}$$



A partir du repère $\pi = \frac{6\pi}{6}$, on positionne $\frac{\pi}{6}$

au sixième du demi-cercle π .

On peut alors graduer régulièrement le cercle pour visualiser les multiples de $\frac{\pi}{6}$

Ex : Placer les points du cercle correspondant à :

$$\frac{-4\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{6} \quad \frac{-7\pi}{6} \quad \frac{11\pi}{6}$$

Mais s'il fallait placer $\frac{437\pi}{6}$...

2° Mesure principale d'un angle orienté

On a vu dans les exemples précédents qu'un même point du cercle peut être associé à différentes mesures d'angles. Autrement dit, un angle possède plusieurs mesures.

Il suffit en effet d'effectuer **un ou plusieurs tours complets dans un sens ou dans l'autre** pour retrouver le même point du cercle.

Autrement dit, on peut **ajouter ou soustraire autant de fois qu'on le souhaite 2π** .

Ex : prenons un angle dont la mesure est $\frac{5\pi}{3}$

On peut voir sur le cercle trigonométrique qu'une autre mesure de cet angle est $\frac{-\pi}{3}$

Mais $\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}$ est aussi une mesure de cet angle, tout comme $\frac{5\pi}{3} - 2 \times 2\pi = \frac{-7\pi}{3}$

Ainsi, si θ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ alors $\theta + 2k\pi$ est aussi une mesure de cet angle **quel que soit $k \in \mathbb{Z}$** .

On peut dire que la mesure de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est égale à θ **modulo 2π** .

Il est toutefois toujours possible de ramener la mesure d'un angle dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ en ajoutant ou en enlevant autant de fois que nécessaire 2π .

Définition : La **mesure principale** d'un angle orienté est » l'unique mesure de cet angle comprise dans l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

Ex 1.1 : donner la mesure principale de l'angle dont une mesure est $\frac{437\pi}{6}$

B
R
O
U
I
L
L
O
N

On cherche le nombre de tours complets contenus dans $\frac{437\pi}{6}$

Or, « un tour » = $2\pi = \frac{12\pi}{6}$

On va donc diviser 437 par 12.

On a $437 : 12 \approx 36$

D'où $437 = 36 \times 12 + 5$

$$\begin{aligned}\frac{437\pi}{6} &= \frac{36 \times 12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \\ &= 36 \times 2\pi + \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

Une mesure principale de $\frac{437\pi}{6}$ est donc $\frac{5\pi}{6}$ (ce qu'on peut noter $\frac{437\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$)

« modulo 2π »
(c-à-d « à 2π près »)

Ex 1.2 : donner la mesure principale de l'angle dont une mesure est $\frac{443\pi}{6}$

On a $443 : 12 \approx 36,9 \approx 37$

D'où $443 = 37 \times 12 - 1$

$$\begin{aligned}\frac{443\pi}{6} &= \frac{37 \times 12\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \\ &= 37 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

Une mesure principale de $\frac{443\pi}{6}$ est donc $-\frac{\pi}{6}$

Ex 2 : donner la mesure principale de l'angle dont une mesure est $\frac{-245\pi}{4}$

On a $-245 : 8 = -30,625 \approx -31$

D'où $-245 = -31 \times 12 + 3$

$$\begin{aligned}\frac{-245\pi}{4} &= \frac{-31 \times 12\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \\ &= -31 \times 2\pi + \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Une mesure principale de $\frac{-245\pi}{4}$ est donc $\frac{3\pi}{4}$

Remarque : Pour savoir si deux mesures correspondent au même angle, il n'est pas nécessaire de déterminer leurs mesures principales pour les comparer.

On peut en effet calculer leur **différence** pour voir s'il s'agit ou non **d'un multiple de 2π** .

Par exemple, les mesures $\frac{-319\pi}{6}$ et $\frac{281\pi}{6}$ correspondent-elles à un même angle?

$$\frac{281\pi}{6} - \frac{-319\pi}{6} = \frac{600\pi}{6} = 100\pi = 50 \times 2\pi$$

Il s'agit donc bien de mesures d'un même angle !