

SUITES NUMÉRIQUES

1^{ère} partie

I Généralités

1° Définition

Une suite numérique est une fonction u définie sur $\mathbb{N}$ ou éventuellement sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, c'est une fonction qui à tout entier naturel n associe le nombre $u(n)$, plus simplement noté u_n .

On dit que u_n est le terme de rang n de la suite u (ou le terme d'indice n)

Ex : prenons la suite constituée des nombres pairs.

On peut noter $u_0 = 0, u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8$, etc.

Attention : dans cet exemple, u_0 est le 1^{er} terme de la suite, mais c'est le terme de rang 0. Et u_1 est le terme de rang 1, mais c'est le 2nd terme de la suite...

Notations : $\hookrightarrow (u_n)$ désigne la suite u , et u_n désigne le terme de rang n .

$\hookrightarrow$ de la même manière que u_5 est le terme suivant par rapport à u_4 , on peut dire que u_{n+1}

est le terme suivant par rapport à u_n , et u_{n-1} le terme précédent par rapport à u_n .

2° Suites définies par une relation explicite

Il s'agit de suites définies par une relation de la forme $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Pour calculer le terme de rang n , il suffit donc de calculer l'image de n par f , c'est-à-dire de remplacer n par sa valeur.

Ainsi, il est possible de calculer directement n'importe quel terme de la suite.

Ex : $u_n = 3n^2 - 7n + 1$ pour $n \geq 0$ (avec $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$)

Si l'on souhaite calculer u_3 , cela donne :

$$\begin{aligned} u_3 &= 3 \times 3^2 - 7 \times 3 + 1 \\ &= 3 \times 9 - 21 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Remarque : avec certaines fonctions, on peut avoir un ensemble de définition « particulier ».

Si $u_n = \frac{1}{n-2}$, on prendra alors $n \geq 3$ car u_2 n'est pas défini.

3° Suites définies par une relation de récurrence

Il s'agit de suites pour lesquelles le terme suivant (c'est-à-dire u_{n+1}) est défini à partir du terme précédent (c'est-à-dire u_n)

Autrement dit, il s'agit de suites définies par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ainsi, le terme suivant est l'image par la fonction f du terme précédent.

Pour calculer un terme, il faut donc connaître le terme précédent, et par conséquent tous les termes précédents.

De telles suites nécessitent donc un « point de départ », c'est-à-dire une valeur initiale (le « 1^{er} terme » de la suite, généralement u_0 ou u_1).

Ex : $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$ (avec $f(x) = 2x + 3$) Calculons u_3 :

$$u_1 = 2u_0 + 3$$

$$= 2 \times 1 + 3$$

$$= 5$$

$$u_2 = 2u_1 + 3$$

$$= 2 \times 5 + 3$$

$$= 13$$

$$u_3 = 2u_2 + 3$$

$$= 2 \times 13 + 3$$

$$= 29$$

Remarques : 1. Une suite « mal » définie par une relation de récurrence peut poser problème.
Prenons le cas de la suite qui serait définie par $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$:

$$u_1 = \sqrt{3 - 2} = \sqrt{1} = 1$$

$$u_2 = \sqrt{1 - 2} = \sqrt{-1} \dots$$

2. On peut définir une suite avec une relation de récurrence sur plusieurs générations : par exemple, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 4$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$.

$$u_2 = 3 \times (-1) - 2 \times 2 + 4$$

$$= -3$$

$$u_3 = 3 \times (-3) - 2 \times (-1) + 4$$

$$= -4$$

3. On peut trouver des relations « mixtes » : par exemple, $u_{n+1} = 2u_n - 3n + 2$ et $u_0 = 5$.

$$u_1 = 2u_0 - 3 \times 0 + 2$$

$$= 2 \times 5 - 0 + 2$$

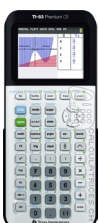
$$= 12$$

$$u_2 = 2u_1 - 3 \times 1 + 2$$

$$= 2 \times 12 - 3 + 2$$

$$= 23$$

Il est possible de calculer les 1^{ers} termes d'une suite définie par récurrence à l'aide de la touche « rép » de la calculatrice, laquelle réutilise la réponse du calcul précédent :



- Entrer le 1^{er} terme et le valider avec « enter »
- Entrer la formule de récurrence en remplaçant u_n par « rép » qu'on obtient en tapant « 2nde » puis « (-) »
- Valider avec « enter » autant de fois qu'on le souhaite

II Sens de variation

Définition : Une suite est dite **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$

Une suite est dite **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

Et une suite est dite **monotone** si elle est **croissante** ou **décroissante**.

Remarques : 1) Si $u_{n+1} > u_n$ alors la suite est **strictement croissante**

2) Il est possible qu'une suite soit croissante uniquement à partir d'un certain rang...

3) Une suite est dite constante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

Pour déterminer le sens de variation d'une suite (c'est-à-dire savoir si **elle est croissante ou décroissante**),

on étudie **le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$** :

$\hookrightarrow$ Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est **croissante**.

$\hookrightarrow$ Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite (u_n) est **décroissante**.



Pour exprimer u_{n+1} à partir de u_n , il faut **remplacer n par $n + 1$** dans l'expression de u_n en mettant des parenthèses si nécessaire !

Ex : Déterminer le sens de variation de la suite définie par $u_n = n^2 - 6n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 6(n+1) + 5 - (n^2 - 6n + 5) \\&= n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 + 5 - n^2 + 6n - 5 \\&= 2n - 5\end{aligned}$$

Etudions maintenant **le signe de $u_{n+1} - u_n$** :

$$2n - 5 = 0$$

$$2n = 5$$

$$n = \frac{5}{2} = 2,5$$

n	0	2,5	$+\infty$
$2n = 5$	—	+	

Autrement dit, (u_n) est **croissante à partir du rang $n = 3$**

Remarques : 1. Pour certaines suites à termes **positifs**, il peut parfois être plus agréable de comparer

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (suites construites à partir de puissances, de produits / quotients...)

2. Pour les suites explicites définies par $u_n = f(n)$, on peut remarquer que (u_n) et f ont **le même sens de variation**.

III Limite d'une suite

Ce paragraphe a pour objet de définir intuitivement la notion de « limite » d'une suite. On va donc établir des conjectures et non des certitudes.

1° Suite convergente

On dit qu'une suite est convergente si ses valeurs finissent par se stabiliser au bout d'un certain temps.

Ex : considérons la suite définie par $u_n = \frac{4n - 5}{3 - 2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	5	10	50	100	1 000	10 000	100 000
u_n	-1,667	-1	-3	-2,143	-2,059	-2,01	-2,005	-2,001	-2,00005	≈ -2

Il semblerait donc que, lorsque n devient grand, les termes de la suite se rapprochent de -2 .

On dit alors que (u_n) converge vers 2. A ce stade, c'est une conjecture...

Cela se note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

2° Suite divergente

On dit qu'une suite est divergente si ses valeurs ne se stabilisent pas au bout d'un certain temps.

Ex 1 : considérons la suite définie par $u_n = n^2 - 5n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	5	10	50	100	1 000	10 000	100 000
u_n	3	0	1	6	15	2 253	9 503	995 003	10^8	10^{10}

Il semblerait donc que, lorsque n devient grand, les termes de la suite deviennent grands et se rapprochent de $+\infty$.

On dit alors que (u_n) diverge vers $+\infty$ ou que (u_n) tend vers $+\infty$. A ce stade, c'est une conjecture...

Ex 2 : considérons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = -2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	-2	4	-2	16	-32	64	-128	256	-512

Il semblerait donc que, lorsque n devient grand, les termes de la suite ne se stabilisent absolument pas ; et ne se rapprochent pas non plus de $+\infty$ ou de $-\infty$.

On dit alors que (u_n) diverge. A ce stade, c'est une conjecture...