

DÉRIVATION

2^{ème} partie

I Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsque pour tout $a \in I$, $f'(a)$ existe.

On note alors f' la fonction qui à tout x appartenant à I associe le nombre dérivé de f en x .

On dit que f' est la fonction dérivé de f .

On a déjà vu que le nombre dérivé de f en a noté $f'(a)$ est défini par :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ex : Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{h(2a + h)}{h} \\ &= 2a + h \end{aligned}$$

D'où $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$

On obtient alors une fonction qui à tout nombre a associe son nombre dérivé $f'(a)$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$

II Fonctions de référence

Propriété : Le tableau ci-dessous donne les dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	$f(x)$	Dérivable sur	$f'(x)$
Affine	$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$
Puissance $n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Racine	$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Preuves : Fonction affine : à faire en exercice

Fonction racine : faisable mais on s'en dispensera (*voir site internet*)

Fonctions puissances : preuve faite pour $n = 2$ en début de chapitre, et faisable en exercice pour $n = 3$. (*et pour $n \geq 4$, il faut attendre la démonstration par récurrence qui sera vue en terminale*)

⇒ Démontrons que la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \frac{\frac{a - (a+h)}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{a - a - h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{-h}{ha(a+h)} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

⇒ Démontrons que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \quad \text{avec } h > 0 \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}\end{aligned}$$

Or, lorsque h tend vers 0, ce quotient n'a pas de limite finie : il tend vers $+\infty$.

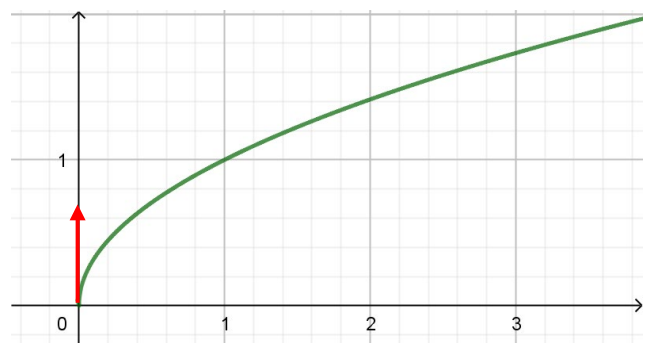
Donc $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Graphiquement, on peut observer une

demi-tangente verticale en 0 :

(le « coefficient directeur » de la « tangente »

en 0 vaut « $+\infty$ » ➔ verticale)



Ex : donner les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = -3x + 5$$

$$f_2(x) = -2 + 6x$$

$$f_3(x) = 7x$$

$$f_1'(x) = -3$$

$$f_2'(x) = 6$$

$$f_3'(x) = 7$$

$$f_4(x) = -8$$

$$f_5(x) = x^4$$

$$f_6(x) = x^3$$

$$f_4'(x) = 0$$

$$f_5'(x) = 4x^3$$

$$f_6'(x) = 3x^2$$

$$f_7(x) = x^2$$

$$f_8(x) = x$$

$$f_7'(x) = 2x$$

$$f_8'(x) = 1$$

Il reste encore une formule « classique » :

Inverse de puissance, $n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{-n}{x^{n+1}}$
---	------------------------	--------------------------------------	------------------------------

Avec $n = 1$, on retrouve que la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

Avec $n = 2$, on obtient que la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

Mais on peut surtout observer que c'est la même formule que celle des puissances !

En effet, $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$

Autrement dit, on peut écrire que :

Puissance $n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ ou $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
-----------------------------------	--------------	--	--------------------

III Dérivation et opérations

1° Dérivée d'une somme

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

La somme $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

Démonstration : voir complément en fin de chapitre

Ex : Calculer la dérivée de $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 7$

On dérive **terme à terme** :

$$P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 2$$

2° Dérivée d'un produit

Propriété : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Le produit $uv = u \times v$ est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$

Démonstration : Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h)}{h} \\ &= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h) + u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\ &= \frac{(u(a+h) - u(a))}{h} v(a+h) + u(a) \frac{(v(a+h) - v(a))}{h} \end{aligned}$$

On reconnaît d'une part les taux d'accroissements de u et v .

D'autre part, $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$$

Ex 1 : Calculer la dérivée de $P(x) = (2x - 5)(1 - 6x)$

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2(1 - 6x) + (2x - 5) \times (-6) \\ &= 2 - 12x - 12x + 30 \\ &= -24x + 32 \\ &= 8(4 - 3x) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{ll} u = 2x - 5 & v = 1 - 6x \\ u' = 2 & v' = -6 \end{array} \right.$$

Ex 2 : Calculer la dérivée de $f(x) = x\sqrt{x}$ ($x > 0$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{ll} u = x & v = \sqrt{x} \\ u' = 1 & v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right.$$

Corollaire 1 : Si k est une constante, alors $(ku)' = ku'$

Démonstration : $(ku)' = u' \times k + u \times 0 = ku'$

Ex 1 : Calculer la dérivée de $P(x) = 12x^3 - 30x^2 + 25x - 9$

$$\begin{aligned} P'(x) &= 12 \times 3x^2 - 30 \times 2x + 25 \\ &= 36x^2 - 60x + 25 \\ &= (6x - 5)^2 \end{aligned}$$

Ex 2 : Calculer la dérivée de $g(x) = \frac{-3}{x}$

On remarque que $g(x) = -3 \times \frac{1}{x}$

$$\text{D'où } g'(x) = -3 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{3}{x^2}$$

Ex 3 : Calculer la dérivée de $h(x) = \frac{5-4x}{3}$

On remarque que $h(x) = \frac{1}{3}(5-4x)$

$$\text{D'où } h'(x) = \frac{1}{3} \times (-4) = \frac{-4}{3}$$

Corollaire 2 : $(u^2)' = 2uu'$

Démonstration : $(u^2)' = (u \times u)' = u'u + uu' = 2u'u$

Ex : Calculer la dérivée de $Q(x) = (4x-1)^2$

$$\begin{aligned} Q'(x) &= 2(4x-1) \times 4 \\ &= 8(4x-1) \end{aligned}$$

3° Dérivée d'un quotient

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

L'inverse de u est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Démonstration : voir complément en fin de chapitre

Ex : Calculer la dérivée de $h(x) = \frac{4}{3-2x}$

On remarque que $h(x) = 4 \times \frac{1}{3-2x}$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4 \times \frac{-(-2)}{(3-2x)^2} \\ &= \frac{8}{(3-2x)^2} \end{aligned}$$

Propriété : Le quotient $\frac{u}{v}$ (avec $v(x) \neq 0$) est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstration : On utilise les formules de dérivation d'un produit et de l'inverse :

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= \left(u \times \frac{1}{v}\right)' \\ &= u' \frac{1}{v} + u \left(\frac{1}{v}\right)' \\ &= \frac{u'}{v} + u \frac{-v'}{v^2} \\ &= \frac{u'v}{v^2} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Ex : Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{5x-3}{2x+7}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5(2x+7) - (5x-3) \times 2}{(2x+7)^2} \\ &= \frac{10x+35-10x+6}{(2x+7)^2} \\ &= \frac{41}{(2x+7)^2} \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = 5x-3 & v = 2x+7 \\ u' = 5 & v' = 2 \end{array} \right.$$

Cas particulier : Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{-3}{5x}$

On peut remarquer que $f(x) = \frac{-3}{5} \times \frac{1}{x}$. D'où $f'(x) = \frac{-3}{5} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{3}{5x^2}$

4° Dérivée d'une composée

Soit f une fonction dérivable, et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La dérivée de $f(ax+b)$ est $a \times f'(ax+b)$

Ex : Calculer la dérivée de $f(x) = 5\sqrt{4-2x}$ pour $x \in]-\infty; 2[$

$$f'(x) = 5 \times (-2) \times \frac{1}{2\sqrt{4-2x}} = \frac{-10}{2\sqrt{4-2x}}$$

Remarque : $x \in]-\infty; 2[$ permet de s'assurer que $4-2x > 0$

$\Rightarrow$ Plus généralement, la dérivée de $f(u(x))$ est $u'(x) \times f'(u(x))$

IV Cas de la fonction valeur absolue

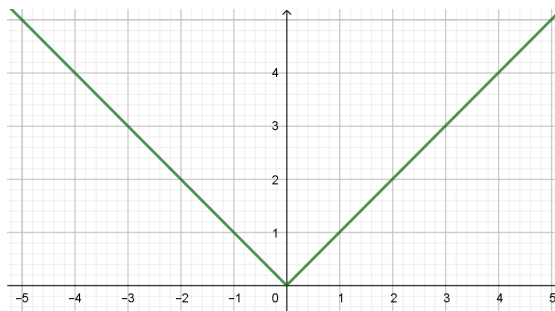
Définition : La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

On peut imaginer qu'elle est dérivable sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$ car sur ces intervalles, la valeur absolue est en fait une fonction affine. Mais qu'en est-il en 0 ?

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

$$\text{Si } h > 0 \text{ alors } \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\text{Si } h < 0 \text{ alors } \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$



Par conséquent, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ n'existe pas, car sa valeur change selon le signe de h .

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.

COMPLÉMENTS

⇒ La somme $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$

Démonstration : Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}\frac{(u + v)(a + h) - (u + v)(a)}{h} &= \frac{u(a + h) + v(a + h) - (u(a) + v(a))}{h} \\ &= \frac{u(a + h) + v(a + h) - u(a) - v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a + h) - u(a)}{h} + \frac{v(a + h) - v(a)}{h}\end{aligned}$$

On reconnaît les taux d'accroissements de u et v .

D'où le résultat en passant à la limite lorsque h tend vers 0.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I avec $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

⇒ L'inverse de u est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

Démonstration : Soit $a \in I$.

$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a + h) - \left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{u(a + h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} \\ &= \frac{\frac{u(a) - u(a + h)}{u(a)u(a + h)}}{h} \\ &= \frac{u(a) - u(a + h)}{u(a)u(a + h)} \times \frac{1}{h} \\ &= \frac{1}{u(a)u(a + h)} \times \frac{u(a) - u(a + h)}{h} \\ &= \frac{-1}{u(a)u(a + h)} \times \frac{u(a + h) - u(a)}{h}\end{aligned}$$

On reconnaît d'une part le taux d'accroissement de u .

D'autre part, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{u(a)u(a + h)} = \frac{-1}{u(a)u(a)} = \frac{-1}{u^2(a)}$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)(a + h) - \left(\frac{1}{u}\right)(a)}{h} = \frac{-1}{u^2(a)} \times u'(a) = \frac{-u'(a)}{u^2(a)}$