

SECOND DEGRÉ

2^{ème} partie

I Résolution d'une équation du second degré

1° Racines d'un trinôme

Définition : Une équation du second degré est une équation pouvant se ramener à $ax^2 + bx + c = 0$ où

a, b et c sont des réels, $a \neq 0$.

Une solution de cette équation est également appelée **racine du trinôme** $ax^2 + bx + c$.

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme.

Sa forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ où $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, la forme canonique devient $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)$ (*)

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

Ex : Calculer le discriminant des trinômes suivants :

$$f(x) = 2x^2 + 12x + 19$$

$$g(x) = 4x^2 - 12x - 2$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 19$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times (-2)$$

$$= 144 - 152$$

$$= 144 + 32$$

$$= -8$$

$$= 176$$

Propriété : Considérons l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

↪ Si $\Delta > 0$, l'équation a **deux solutions distinctes** :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad (\text{ou le contraire})$$

↪ Si $\Delta = 0$, l'équation a **une unique solution** : $x_0 = \frac{-b}{2a} (= \alpha)$

↪ Si $\Delta < 0$, l'équation **n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$**

Remarque : la formule de x_0 se retrouve en remplaçant Δ par 0 dans l'expression de x_1 ou de x_2

Démonstration : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) = 0$ d'après (*)

$$\Leftrightarrow a(x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a}$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{car } \alpha = \frac{-b}{2a}$$

↪ Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solutions car un carré est toujours positif.

↪ Si $\Delta = 0$, l'équation devient $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$.

D'où l'unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$

↪ Si $\Delta > 0$, on obtient $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$

Mais attention : $\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4} \times \sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.

On va donc distinguer deux cas :

$$\text{Si } a > 0 : \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x_2 \quad x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x_1$$

$$\text{Si } a < 0 : \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \times (-a)} \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2 \times (-a)}$$

$$x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x_1 \quad x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = x_2$$

Ex 1 : Déterminer les racines du polynôme $P(x) = 2x^2 + 7x - 15$

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times (-15)$$

$$= 49 + 120$$

$$= 169 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } x_1 &= \frac{-7 - \sqrt{169}}{2 \times 2} & \text{et } x_2 &= \frac{-7 + \sqrt{169}}{2 \times 2} \\ &= \frac{-7 - 13}{4} & &= \frac{-7 + 13}{4} \\ &= \frac{-20}{4} = -5 & &= \frac{6}{4} = 1,5 \end{aligned}$$

Ex 2 : Résoudre l'équation $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1$$

$$= 36 - 36$$

$$= 0$$

$$\text{D'où } x_0 = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Ex 3 : Résoudre l'équation $x^2 + 3x + 4 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$= 9 - 16$$

$$= -7 < 0$$

L'équation n'a donc pas de solutions

Exercice : déterminer les valeurs de b pour lesquelles l'équation $3x^2 + bx + 6 = 0$ admet deux solutions.

Pour que cette équation ait deux solutions, il faut que $\Delta > 0$.

Autrement dit $b^2 - 4 \times 3 \times 6 > 0$

$$b^2 - 72 > 0$$

$$b^2 > 72$$

$$b > \sqrt{72} \text{ ou } b < -\sqrt{72}$$

$$\text{Or, } \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } b \in]-\infty; -6\sqrt{2}[\cup]6\sqrt{2}; +\infty[$$

Exercice : résoudre l'équation suivante : $3x^4 - 5x^2 - 12 = 0$ (équation « bicarrée »)

On pose $X = x^2$. On a alors $X^2 = (x^2)^2 = x^4$.

L'équation devient alors $3X^2 - 5X - 12 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-12)$$

$$= 25 + 144$$

$$= 169$$

$$\text{D'où } X_1 = \frac{5 - \sqrt{169}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{5 + \sqrt{169}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{5 - 13}{6}$$

$$= \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

$$= \frac{5 + 13}{6}$$

$$= \frac{18}{6} = 3$$



X et pas x...

$$\text{Autrement dit, } x^2 = \frac{-4}{3} \quad \text{ou} \quad x^2 = 3$$

Impossible

$$x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}$$

Au final, l'équation $3x^4 - 5x^2 - 12 = 0$ admet deux solutions : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ Une équation de degré 4 peut avoir de 0 à 4 solutions

2° Somme et produit des racines d'un trinôme

Propriété : Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme de discriminant $\Delta > 0$.

La somme S et le produit P de ses racines sont donnés par $S = \frac{-b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$

Preuve :

$$\begin{aligned} S &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} \\ P &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Ex : 1. Déterminer une racine évidente de l'équation $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

2. Déterminer la seconde racine de cette équation.

$\Rightarrow$ Une « racine évidente » est une solution simple de l'équation, qu'on peut déterminer par simple observation / calcul mental. En général, il s'agit de 0, 1, -1, 2 ou -2.

1. $x = -1$ est une racine évidente.

En effet, $2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$

2. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$.

Donc $(-1) \times x_2 = \frac{-5}{2}$

$$x_2 = \frac{5}{2}$$

Application : déterminer deux nombres dont la somme et le produit sont connus.

Propriété : Les deux nombres dont la somme est S et le produit P sont les solutions de l'équation :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Preuve : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ car $a \neq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{-b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Ex : déterminer deux nombres dont la somme vaut -6 et le produit -432 .

Ces sont les solutions de l'équation $x^2 - (-6)x + (-432) = 0$ c'est-à-dire $x^2 + 6x - 432 = 0$

$$\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-432)$$

$$= 36 + 1\,728$$

$$= 1\,764 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } x_1 &= \frac{-6 - \sqrt{1\,764}}{2 \times 1} & \text{et} & & x_2 &= \frac{-6 + \sqrt{1\,764}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-6 - 42}{2} & & & &= \frac{-6 + 42}{2} \\ &= \frac{-48}{2} = -24 & & & &= \frac{36}{2} = 18 \end{aligned}$$

Les nombres dont la somme vaut -6 et le produit -432 sont -24 et 18 .

II Signe d'une fonction du second degré

1° Factorisation

Propriété : Considérons la fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$ donc)

$\hookrightarrow$ Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f

$\hookrightarrow$ Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de f

$\hookrightarrow$ Si $\Delta < 0$, $f(x)$ ne peut pas se factoriser en facteurs du 1^{er} degré

Démonstration : Prenons le cas où $\Delta > 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ d'après (*) vu dans le paragraphe I}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) \quad (**)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Pour le cas où } \Delta = 0, \text{ idem : } ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ = a(x - x_0)^2$$

$\Leftrightarrow$ Pour le cas où $\Delta < 0$, supposons que le polynôme se factorise.

Dans ce cas, le polynôme aurait **au moins une racine**.

Absurde car lorsque $\Delta < 0$ on sait **qu'il n'y a pas de racines...**

Ex 1 : Factoriser si possible le polynôme P défini par $P(x) = 3x^2 + 13x - 10$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 3 \times (-10) \\ = 169 + 120 \\ = 289 > 0 \\ x_1 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{2 \times 3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{2 \times 3} \\ = \frac{-13 - 17}{6} \quad = \frac{-13 + 17}{6} \\ = \frac{-30}{6} = -5 \quad = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } P(x) = 3(x - (-5))\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x + 5)(3x - 2)$$

Ex 2 : Factoriser si possible le polynôme Q défini par $Q(x) = 6x^2 - 5x + \frac{25}{24}$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 6 \times \frac{25}{24} \\ = 25 - 25 \\ = 0 \\ x_0 = \frac{5}{2 \times 6} = \frac{5}{12} \\ \text{D'où } Q(x) = 6\left(x - \frac{5}{12}\right)^2$$

Ex 3 : Factoriser si possible le polynôme R défini par $R(x) = 5x^2 + 8x + 7$

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 5 \times 7 \\ = 64 - 140 \\ = -76 < 0$$

Il n'y a donc pas de racines : le polynôme R ne se factorise pas.

Application : déterminer la fonction du second degré dont la représentation graphique est ci-contre :

Cette fonction admet pour racines 3 et -2.

Donc $f(x) = a(x - 3)(x + 2)$

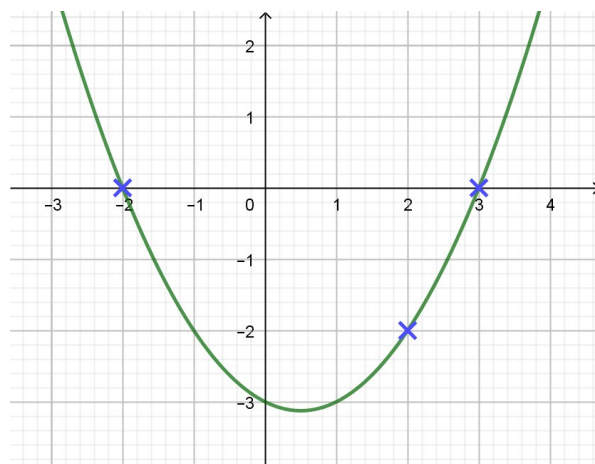
Par ailleurs, elle passe par (2 ; -2).

Donc $f(2) = a(2 - 3)(2 + 2) = -2$

$$a \times (-1) \times 4 = -2$$

$$a = \frac{-2}{-4} = 0,5$$

Donc $f(x) = 0,5(x - 3)(x + 2)$



2° Signe d'un trinôme

Propriété : Considérons la fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

↪ Si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de a si $x \in]-\infty ; x_1] \cup [x_2 ; +\infty[$.

$f(x)$ est du signe contraire de a si $x \in [x_1 ; x_2]$

↪ Si $\Delta = 0$, $f(x)$ s'annule lorsque $x = x_0$ et sinon $f(x)$ est du signe de a

↪ Si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x



On peut retenir que le signe d'un trinôme commence toujours par le signe de a

Démonstration : ↪ Si $\Delta > 0$, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+

Le signe de $f(x)$ dépend donc du signe de a et commence toujours par le signe de a .

↪ Si $\Delta = 0$, $f(x) = a(x - x_0)^2$

Un carré étant positif, $f(x)$ sera donc du signe de a pour tout x (et nul lorsque $x = x_0$)

↪ Si $\Delta < 0$, $f(x) = a \left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{> 0} \right)$ d'après (**) vu dans le paragraphe II 1°

$f(x)$ est donc du signe de a pour tout x .

Ex 1 : Résoudre $-4x^2 - 2x + 30 < 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-4) \times 30$$

$$= 4 + 480$$

$$= 484$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{484}}{2 \times (-4)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{484}}{2 \times (-4)}$$

$$= \frac{2 - 22}{-8}$$

$$= \frac{2 + 22}{-8}$$

$$= \frac{-20}{-8} = \frac{5}{2}$$

$$= \frac{24}{-8} = -3$$

x	$-\infty$	-3	$2,5$	$+\infty$	
$-4x^2 - 2x + 30$	$-$	0	$+$	0	$-$

D'où $x \in]-\infty ; -3[\cup]2,5 ; +\infty[$

Ex 2 : Résoudre $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

On obtient $\Delta = 0$ et $x_0 = 1,5$.

x	$-\infty$	$1,5$	$+\infty$
$4x^2 - 12x + 9$	$+$	0	$+$

D'où $S = \{1,5\}$

$\Rightarrow$ pour $4x^2 - 12x + 9 < 0$, on aurait obtenu $S = \emptyset$

$\Rightarrow$ pour $4x^2 - 12x + 9 \geq 0$, on aurait obtenu $S = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pour $4x^2 - 12x + 9 > 0$, on aurait obtenu $S = \mathbb{R} \setminus \{1,5\} =]-\infty ; 1,5[\cup]1,5 ; +\infty[$

Ex 3 : Pour résoudre $3x^2 + 2x + 1 \leq 0$, on obtient $\Delta = -8$. Et on en déduit que $S = \emptyset$

$\Rightarrow$ pour $3x^2 + 2x + 1 < 0$, on aurait obtenu $S = \emptyset$

$\Rightarrow$ pour $3x^2 + 2x + 1 \geq 0$, on aurait obtenu $S = \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pour $3x^2 + 2x + 1 > 0$, on aurait obtenu $S = \mathbb{R}$

Ex 4 : déterminer la position relative des courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 2x + 11$ et $g(x) = 3x^2 - 15x - 7$

$\Rightarrow$ Cela revient à déterminer le signe de $f(x) - g(x)$.

$$f(x) - g(x) = 5x^2 - 2x + 11 - (3x^2 - 15x - 7)$$

$$= 5x^2 - 2x + 11 - 3x^2 + 15x + 7$$

$$= 2x^2 + 13x + 18$$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 2 \times 18$$

$$= 169 - 144$$

$$= 25$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-13 - \sqrt{25}}{2 \times 2} & \text{et} & & x_2 &= \frac{-13 + \sqrt{25}}{2 \times 2} \\
 &= \frac{-13 + 5}{4} & & & &= \frac{-13 - 5}{4} \\
 &= \frac{-8}{4} = -2 & & & &= \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-9}{2}$	-2	$+\infty$	
$2x^2 + 13x + 18$	+	0	-	0	+

Si $x \in [-4,5 ; -2]$ alors $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Ex 5 : Résoudre $\frac{6 - 2x}{3x^2 - 13x - 10} \leq 0$

$$6 - 2x = 0$$

$$6 = 2x$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 3 \times (-10)$$

$$= 169 + 120$$

$$= 289$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{13 - \sqrt{289}}{2 \times 3} & \text{et} & & x_2 &= \frac{13 + \sqrt{289}}{2 \times 3} \\
 &= \frac{13 - 17}{6} & & & &= \frac{13 + 17}{6} \\
 &= \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} & & & &= \frac{30}{6} = 5
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{3}$	3	5	$+\infty$	
$6 - 2x$	+	0	+	0	-	
$3x^2 - 13x - 10$	+	0	-	0	+	
$\frac{6 - 2x}{3x^2 - 13x - 10}$	+		-	0		-

D'où $x \in \left] \frac{-2}{3} ; 3 \right] \cup]5 ; +\infty[$