

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

I Rappels

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne connaît pas le résultat à l'avance de manière certaine.

On appelle issues les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire.

L'ensemble de toutes les issues est appelé univers : on le note Ω .

Un événement est une condition qui mène à une ou plusieurs issues. On dit qu'un événement est réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire est l'une des issues possibles pour cet événement.

L'évènement contraire de l'évènement A est noté $\bar{A}$.

Lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité de A est $p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$

Lors d'une expérience aléatoire, la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

Donner la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est donner les probabilités de toutes les issues de l'univers. On la présente généralement sous la forme d'un tableau.

Ex : On lance un dé truqué dont la face « 6 » a 35% de chances d'apparaître. La face « 1 » n'a que 5% de chances d'apparaître, et les autres faces sont équiprobables.

1° Déterminer la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2° On note A l'évènement « Obtenir un résultat pair ». Calculer $p(A)$.

1° Notons x la probabilité des quatre autres faces. On a donc $0,35 + 0,05 + 4x = 1$.

$$4x = 1 - 0,35 - 0,05 = 0,60 \text{ et donc } x = \frac{0,60}{4} = 0,15$$

D'où la loi de probabilité :

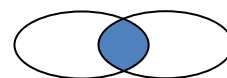
Faces	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,15	0,15	0,15	0,15	0,35

$$2^\circ p(A) = 0,15 + 0,15 + 0,35$$

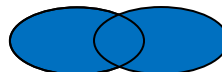
$$= 0,65$$

Propriété : Quels que soient les événements A et B, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

↪ Intersection : issues dans A et B simultanément, noté $A \cap B$



↪ Union : issues dans A ou B, noté $A \cup B$



Les éléments de $A \cap B$ sont aussi dans $A \cup B$

II Probabilités conditionnelles

Ex : Dans un lycée de 1 000 élèves on a :

	Fille	Garçon	Total
Demi-pensionnaire	385	270	655
Externe	165	180	345
Total	550	450	1 000

On considère les événements suivants : F « L'élève est une fille » et E « L'élève est un externe »
On sélectionne un élève au hasard.

La probabilité que ce soit une fille est $p(F) = \frac{550}{1\,000} = 0,55$

La probabilité que ce soit une fille externe est $p(F \cap E) = \frac{165}{1\,000} = 0,165$

Supposons maintenant que l'on ne choisisse plus un élève totalement au hasard, mais que l'on choisisse un élève parmi les filles.

La probabilité que cette fille soit externe est alors $\frac{165}{550} = 0,3$ (on regarde uniquement la colonne « Fille »...)

On dit que c'est la probabilité pour un élève d'être externe sachant que c'est une fille, c'est-à-dire la probabilité de E sachant F. On la note $p_F(E)$

De la même manière, $p_E(F) = \frac{165}{345}$ (on regarde uniquement la ligne « Externe »...)

$$\begin{aligned}\text{On constate que } \frac{p(F \cap E)}{p(F)} &= \frac{\frac{165}{1\,000}}{\frac{550}{1\,000}} = \frac{165}{1\,000} \times \frac{1\,000}{550} \\ &= \frac{165}{550} \\ &= p_F(E)\end{aligned}$$

Définition : Soient A et B deux évènements tels que $p(A) \neq 0$.

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Ex : Un jeu de 52 cartes contient des cartes, 13 de chaque couleur     dont les valeurs sont 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D, R et As. On tire une carte au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer un valet sachant qu'on a tiré un trèfle ?
2. Quelle est la probabilité de tirer un trèfle sachant qu'on a tiré un valet ?

$$\begin{aligned}p_T(V) &= \frac{p(T \cap V)}{p(T)} \\ &= \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{52} \times \frac{52}{13} \\ &= \frac{1}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_V(T) &= \frac{p(V \cap T)}{p(V)} \\ &= \frac{\frac{1}{52}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{52} \times \frac{52}{4} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Parmi les 13 Trèfles, on a 1 chance d'obtenir le valet

Parmi les 4 Valets, on a 1 chance d'obtenir celui de Trèfle

Remarque : « p_A » est également une probabilité, tout comme le « p » classique.

Ainsi, on a toujours $0 \leq p_A(B) \leq 1$ et $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$

« $A \text{ inter } B$ » correspond aux issues de Ω possédant les caractéristiques de A et de B



« $A \text{ sachant } B$ » correspond aux issues de B possédant les caractéristiques de A .

L'univers de référence n'est donc pas le même.

⇒ Toujours se poser la question « *Sait-on quelque chose ?* » avant de calculer...

On choisit une fille. Déterminer la probabilité que ce soit une externe. → $p_F(E)$

Déterminer la probabilité que ce soit une fille externe. → $p(F \cap E)$

Parmi les externes, déterminer la probabilité que ce soit une fille. → $p_E(F)$

Propriété : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$$

D'où $p_A(B) = \frac{p_B(A) \times p(B)}{p(A)}$ par exemple



La formule $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ est fausse !

Il faut conditionner l'une des deux probabilités pour qu'elle soit vraie.

Ex : Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel. Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :

F : « Le salarié interrogé est une femme »,

S : « Le salarié interrogé a suivi le stage ».

On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

D'après l'énoncé : $p(S) = 0,25$

$p(F) = 0,52$

$p_F(S) = 0,40$

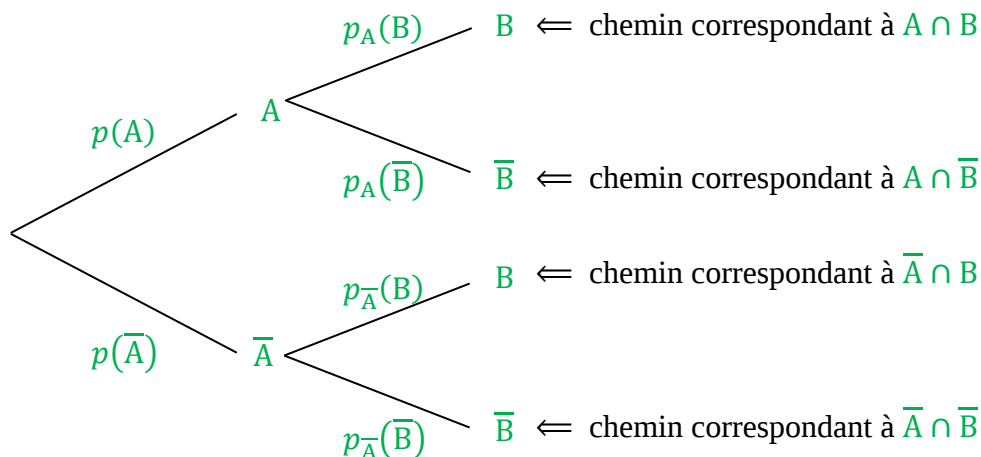
$$\begin{aligned} p_S(F) &= \frac{p(F \cap S)}{p(S)} \\ &= \frac{p(F) \times p_F(S)}{p(S)} \\ &= \frac{0,52 \times 0,40}{0,25} \\ &= 0,832 \end{aligned}$$

III Arbres pondérés (du latin ponderare « peser », de pondus « poids »)

En probabilités, un outil pratique pour modéliser la situation est l'arbre de probabilités :

- chaque **branche** représente une **issue**, laquelle est indiquée au bout de la **branche**.
- on pondère chaque **branche** avec sa **probabilité** (d'où le nom d'arbre « pondéré »)

On appelle **chemin** la **succession** de plusieurs **branches** à partir du début de l'arbre.



Ex 1 : Un test de dépistage d'une maladie grave est testé sur un échantillon d'animaux dont on sait que 2% sont porteurs de cette maladie.

On observe alors que, si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 99% des cas ; et si un animal est sain, le test est négatif dans 97% des cas. L'objectif est d'éliminer tous les animaux testés positifs.

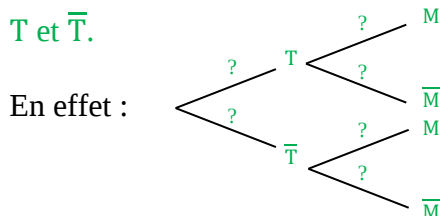
On considère les événements M « Être porteur de la maladie » et T « Avoir un test positif ».

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près si besoin.

1. Réaliser un arbre de probabilités correspondant à cette situation.

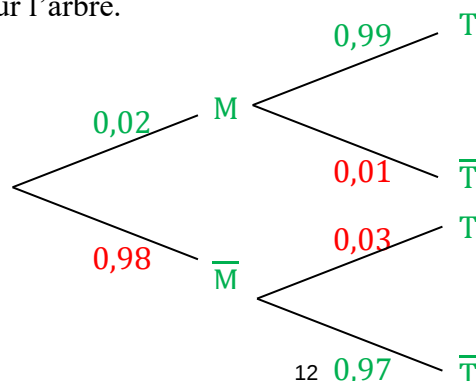
D'après l'énoncé, $p(M) = 0,02$ $p_M(T) = 0,99$ $p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 0,97$

⇒ Ces valeurs indiquent qu'il est plus pratique de commencer l'arbre par M et $\bar{M}$ plutôt que par



Règle n°1 : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

D'où les valeurs en rouge sur l'arbre.



Règle n°2 : La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches qui le composent. (cela permet de retrouver la formule $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$)

2. Quelle est la probabilité qu'un animal soit sain mais testé positif ?

$$\begin{aligned} p(\overline{M} \cap T) &= p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,98 \times 0,03 \\ &= 0,0294 \end{aligned}$$

Règle n°3 : La probabilité d'un événement faisant intervenir plusieurs chemins est la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Cette règle est connue sous le nom de formule des probabilités totales.

3. Quelle est la probabilité qu'un animal soit testé positif ?

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M \cap T) + p(\overline{M} \cap T) \\ &= p(M) \times p_M(T) + p(\overline{M}) \times p_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,02 \times 0,99 + 0,98 \times 0,03 \\ &= 0,0492 \end{aligned}$$

4. a. Juste comme ça, vite fait, ce test semble-t-il fiable ? Oui !

b. Un animal testé s'avère positif : quelle est la probabilité que l'animal soit sain ?

$$\begin{aligned} p_T(\overline{M}) &= \frac{p(\overline{M} \cap T)}{p(T)} \\ &= \frac{0,98 \times 0,03}{0,0492} \\ &\approx 0,5976 \end{aligned}$$

c. Pour endiguer l'épidémie, on décide d'abattre tous les animaux testés positifs. Analyser le résultat précédent.

Si l'on décide d'abattre tous les animaux positifs, on a donc 59,76 % de chances d'abattre un animal sain ! Ce test n'est donc pas fiable.

Ce chiffre est la conséquence de la faible proportion d'animaux malades (seulement 2%)

Ex 2 : Thomas a une playlist composée de musique Classique (30%), de Variété (45%) et de Jazz.

Il a liké 65% des morceaux, $\frac{5}{6}$ des morceaux de Classique et $\frac{4}{9}$ des morceaux de Variété.

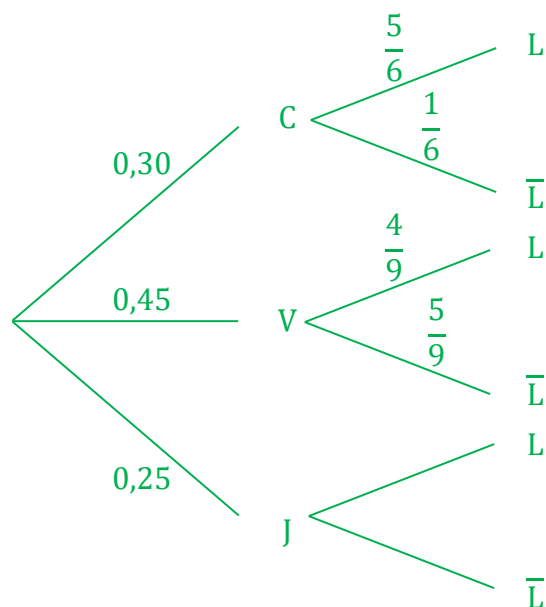
On désigne par C, V et J les événements indiquant que le morceau écouté est un morceau de musique classique, de variété ou de jazz. Et on désigne par L l'événement « *Thomas a liké le morceau* ».

Si l'on considère un morceau de Jazz, quelle est la probabilité qu'il ait été liké ?

Une des premières choses à faire est de traduire les valeurs de l'énoncé en probabilités :

$$p(C) = \frac{30}{100} \quad p(V) = \frac{45}{100} \quad p(L) = \frac{65}{100} \quad p_C(L) = \frac{5}{6} \quad p_V(L) = \frac{4}{9}$$

On peut ensuite tout synthétiser sous la forme d'un arbre de probabilités :



$$p(L) = 0,30 \times \frac{5}{6} + 0,45 \times \frac{4}{9} + 0,25 \times p_J(L)$$

$$\frac{13}{20} = 0,25 + 0,2 + 0,25 \times p_J(L)$$

$$0,65 - 0,25 - 0,2 = 0,25 \times p_J(L)$$

$$\frac{0,2}{0,25} = p_J(L)$$

$$\text{D'où } p_J(L) = 0,8$$

IV Indépendance

Définition : deux événements A et B tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ sont dits indépendants lorsque

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Remarques : 1. Cela revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$. Autrement dit, la probabilité de réaliser l'un des deux événements n'est pas influencée par la réalisation de l'autre.

2. Ne pas confondre événements *indépendants* et événements *incompatibles*. Deux

événements sont *incompatibles* lorsque $A \cap B = \emptyset$

Ex : On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

On considère l'événement T : « La carte est un trèfle » et l'événement V : « La carte est un valet ». Ces événements sont-ils indépendants ?

$$p(T) = \frac{13}{52} \text{ et } p(V) = \frac{4}{52} \text{ donc } p(T) \times p(V) = \frac{13}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{52}$$

L'événement $T \cap V$ correspond à « La carte tirée est le valet de trèfle. »

On a donc $p(T \cap V) = \frac{1}{52}$: les événements T et V sont donc indépendants

Remarques : 1. Ajoutons deux jokers dans le paquet :

$$p(T) \times p(V) = \frac{13}{54} \times \frac{4}{54} = \frac{52}{2916} \text{ et } p(T \cap V) = \frac{1}{54} = \frac{54}{2916}$$

Les événements T et V ne sont plus indépendants !

$\Rightarrow$ La notion d'indépendance n'est donc pas très intuitive / naturelle

2. $p_T(V) = p(V)$ revient à dire que les événements « Tirer un valet parmi les trèfles » et « Tirer un valet parmi toutes les cartes » ont la même probabilité.

Définition : On dit que des expériences sont identiques et indépendantes si elles possèdent les mêmes issues et que chacune de leurs issues ont la même probabilité.

C'est par exemple le cas lorsqu'on tire des boules dans une urne avec remise. C'est également le cas lors de lancers successifs d'un dé, d'une pièce de monnaie...

Ex : Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement avec remise trois boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir successivement une noire puis deux blanches ?

$$\begin{aligned} p(N \cap B \cap B) &= p(N) \times p(B) \times p(B) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{144}{1000} \end{aligned}$$

La question devient plus compliquée si l'on veut la probabilité d'obtenir une seule boule noire. Cela peut en effet être $N \cap B \cap B$, ou bien $B \cap N \cap B$ ou encore $B \cap B \cap N$.

Propriété : Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

$\Rightarrow$ De même, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } p(\bar{A} \cap B) &= p_B(\bar{A}) \times p(B) \\ &= (1 - p_B(A)) \times p(B) \\ &= (1 - p(A)) \times p(B) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.} \\ &= p(\bar{A}) \times p(B) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.