

MATHEMATIQUES N°9

Remarque : L'émotion est forcément au rendez-vous, pour cet ultime contrôle...

Exercice 1 : (8 points) Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2% des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

- Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
- On arrondira les résultats à 10^{-3} près.
 - Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement 3 cachets non conformes.
 - Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.
- Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5 ». Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i , pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i -ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par $S = M_1 + M_2 + \dots + M_{100}$.

On admet que les variables aléatoires $M_1, M_2, \dots, M_{100}$ suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ .

- Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- On note s l'écart type de la variable aléatoire S . Montrer que $s = 10\sigma$.
- On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à 0,9.
 - Montrer que cette condition est équivalente à $p(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1$.
 - A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en déduire la valeur maximale de σ qui permet d'assurer cette condition.

Exercice 2 : (9 points)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

- Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Justifier que pour tout réel x , $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}$.
- En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

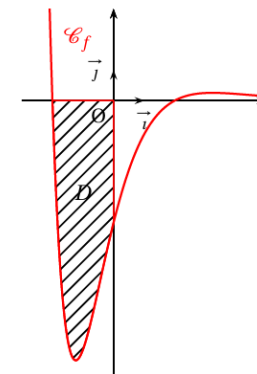
On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Justifier que $I_0 = e^2 - 1$.
- En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$$
- En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2 .

Partie 3

- Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie dans la partie 1.
- On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Le domaine $\mathcal{D}$ du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire $\mathcal{S}$ du domaine $\mathcal{D}$.
- Dans un repère avec 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnées, que vaudrait $\mathcal{S}$ à 10^{-2} près en cm^2 ?



Exercice 3 : (3 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

Démontrer que (I_n) est croissante.

Bonus : (+1,25 points)

- Quelle est le nom de la loi dont parle l'article ?
- Qu'étudie-t-on dans le mini-catalogue à propos des prix des articles ?
- Citer les deux contre-exemples de la loi de Benford donnés au début de l'article (pas l'histoire des factures de garagiste donc...).
- Qu'est-ce qui explique que l'effet de Benford est largement confirmé lorsqu'on étudie les kilométrages apparaissant sur les factures éditées par un garage ?
- Quelle application a été récemment trouvée à la loi dont parle l'article ?

MATHEMATIQUES N°9

Exercice 1 : (8 points)

Partie A

1. $N \hookrightarrow \mathcal{B}(100; 0,02)$ car les cachets sont identiques et considérés indépendants. (0,5)

2. $E(N) = 100 \times 0,02 = 2$

En moyenne, il y a donc 2 cachets non conformes par boîte. (0,5)

3. a. $p(N = 3) = \binom{100}{3} 0,02^3 \times 0,98^{97} \approx 0,182$ (0,5)

b. « Au moins 95 conformes » revient à dire « 5 ou moins de 5 non conformes ».
 $p(N \leq 5) \approx 0,985$ (0,75)

4. $p(N = 0) \geq 0,5$ avec $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n; 0,02)$.

$$\binom{n}{0} 0,02^0 \times 0,98^n \geq 0,5$$

$$0,98^n \geq 0,5$$

$$n \ln 0,98 \geq \ln 0,5$$

$$n \leq \frac{\ln 0,5}{\ln 0,98}$$

Une boîte doit donc contenir au maximum 34 cachets pour respecter ce critère. (1,5)

Partie B

1. $E(S) = E(M_1) + E(M_2) + \dots + E(M_{100})$

$$= 100 \times 2$$

$$= 200$$

En moyenne, la masse de 100 cachets est de 200 g. (0,75)

2. $V(S) = V(M_1) + V(M_2) + \dots + V(M_{100})$ car les M_i sont indépendantes

$$= 100 \times \sigma^2$$

D'où $s = \sqrt{100 \times \sigma^2} = 10\sigma$ (1)

3. a. On souhaite que $p(199 < S < 201) \geq 0,9$

$$p(199 - 200 < S - 200 < 201 - 200) \geq 0,9$$

$$p(|S - 200| < 1) \geq 0,9$$

$$1 - p(|S - 200| \geq 1) \geq 0,9$$

$$p(|S - 200| \geq 1) \leq 0,1$$
 (1)

b. D'après Bienaymé Tchebychev :

$$p(|S - 200| \geq 1) \leq \frac{100\sigma^2}{1^2}$$

$$p(|S - 200| \geq 1) \leq 100\sigma^2$$

Il suffit donc que $100\sigma^2 \leq 0,1$

$$\sigma^2 \leq \frac{0,1}{100}$$

$$\sigma^2 \leq 0,001$$

$$\sigma \leq \sqrt{0,001}$$

La valeur maximale de σ est donc $\sqrt{0,001}$ (soit $\approx 0,0316$) (1,5)

Exercice 2 : (9 points)

Partie 1

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ par produit. (0,5)

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{e^x} = \frac{x^2}{e^x} - \frac{4}{e^x}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ par croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par somme. (1)

2. $f'(x) = 2xe^{-x} - e^{-x}(x^2 - 4)$

$$= e^{-x}(2x - (x^2 - 4))$$

$$= (-x^2 + 2x + 4)e^{-x}$$
 (0,5)

3. $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 2x + 4$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 4$$

$$= 4 + 16$$

$$= 20$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= -1 - \sqrt{5}$$

$$= -1 - \sqrt{5}$$

$$= 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2 \times (-1)}$$

$$= \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$= -1 + \sqrt{5}$$

$$= 1 - \sqrt{5}$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{5}$	$1 + \sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$				

(1,25)

$$f(1 + \sqrt{5}) = ((1 + \sqrt{5})^2 - 4)e^{-(1 + \sqrt{5})}$$

$$= (1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4)e^{-(1 + \sqrt{5})}$$

$$= (2 + 2\sqrt{5})e^{-(1 + \sqrt{5})} \approx 0,25$$

$$f(1 - \sqrt{5}) \approx -8,5$$

Partie 2

$$1. I_0 = \int_{-2}^0 x^0 e^{-x} dx$$

$$= [-e^{-x}]_{-2}^0$$

$$= -e^{-0} + e^{-(-2)}$$

$$= e^2 - 1 \quad (0,75)$$

$$2. I_{n+1} = \int_{-2}^0 x^{n+1} e^{-x} dx$$

$$= [-x^{n+1} e^{-x}]_{-2}^0 - \int_{-2}^0 -(n+1)x^n e^{-x} dx$$

$$= 0 - (-(-2)^{n+1} e^{-(-2)}) + (n+1) \int_{-2}^0 x^n e^{-x} dx$$

$$= (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n \quad (1,5)$$

$$3. I_1 = (-2)^{0+1} e^2 + (0+1) I_0$$

$$= -2e^2 + e^2 - 1$$

$$= -e^2 - 1 \quad (0,5)$$

$$I_2 = (-2)^{1+1} e^2 + (1+1) I_1$$

$$= 4e^2 + 2(-e^2 - 1)$$

$$= 4e^2 - 2e^2 - 2$$

$$= 2e^2 - 2 \quad (0,5)$$

Partie 3

1. $f(x)$ a le même signe que $x^2 - 4$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	+

(0,5)

$$2. \mathcal{S} = - \int_{-2}^0 f(x) dx \text{ car } f(x) \leq 0 \text{ sur } [-2; 0]$$

$$= - \int_{-2}^0 (x^2 - 4) e^{-x} dx$$

$$= - \int_{-2}^0 x^2 e^{-x} dx + \int_{-2}^0 4e^{-x} dx$$

$$= -I_2 + 4I_0$$

$$= -(2e^2 - 2) + 4(e^2 - 1)$$

$$= -2e^2 + 2 + 4e^2 - 4$$

$$= 2e^2 - 2 \quad (1,5)$$

$$3. \mathcal{S} = 2(2e^2 - 2) \approx 25,56 \text{ cm}^2 \text{ car } 1 \text{ u. a.} = 2 \text{ cm}^2 \quad (0,5)$$

Exercice 3 : (3 points)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^n - (1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \quad (1,5)$$

Or, $0 \leq x \leq 1$ donc $x^n \geq 0$, $(1+x^{n+1})(1+x^n) \geq 0$ et $(1-x) \geq 0$.

Par conséquent, $\frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \geq 0$.

$$\text{Donc } \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \geq 0.$$

Ainsi, $I_{n+1} - I_n \geq 0$: (I_n) est croissante. (1,5)

Bonus : (+1,25 points)

- La loi de Benford
- La fréquence d'apparition du 1^{er} chiffre significatif. (+0,25)
- Numéro de téléphone d'une région donnée, numéro de sécurité sociale.
- En général, la majorité des voitures ont un kilométrage de vie inférieur à 300 000 km, ce qui fait que leur 1^{er} chiffre significatif n'est pas équiréparti.
- La détection de fraudes.