

MATHÉMATIQUES N°9

Remarques : Une bonne partie du sujet 2022-2023 pour celles et ceux qui l'auraient fait pour s'entraîner 😊

Exercice 0 : (0,75 points)

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord. Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

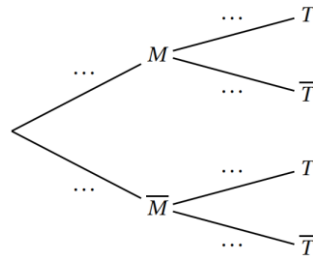
- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95 % des cas.

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.

On considère les événements suivants :

- M : « Le coyote est malade »
- T : « Le test du coyote est positif ».

Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre



Exercice 1 : (2,25 points)

On note G l'événement « Une personne a eu la grippe » et V l'événement « Une personne est vaccinée contre la grippe ».

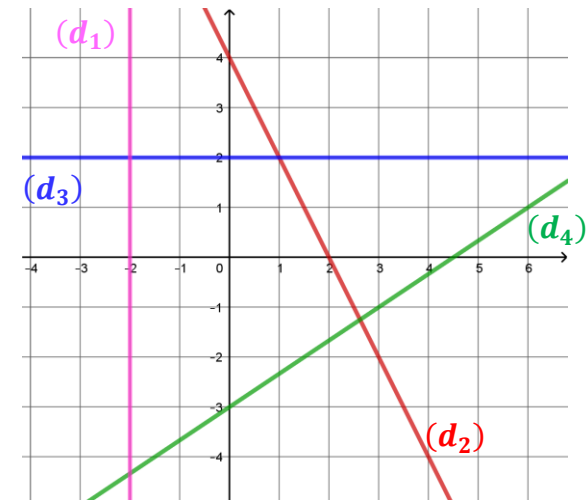
Dans un lycée de 1 470 élèves, on a la répartition suivante :

	G	$\bar{G}$	Total
V	14	336	350
$\bar{V}$	133	987	1 120
Total	147	1 323	1 470

1. Donner les réponses sous la forme $p(\dots) = \dots$:
 - a. Quelle est la probabilité qu'un élève n'ait pas eu la grippe ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'un élève ne soit pas vacciné et qu'il ait eu la grippe ?
 - c. Quelle est la probabilité qu'un élève soit vacciné ou qu'il ait eu la grippe ?
2. On choisit un élève au hasard parmi ceux qui ont été vaccinés. Quelle est la probabilité qu'il ait eu la grippe ?

Exercice 2 : (6,5 points)

1. Donner un vecteur directeur de la droite d'équation $4x - 5y - 1 = 0$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et passant par A(5 ; -2).
3. Après de gros calculs, Nikola a obtenu comme vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$
Peux-tu lui proposer un autre vecteur directeur, plus simple ?
4. Déterminer la pente de la droite (d) passant par E(4 ; -1) et F(-3 ; 2) :
5. Donner les équations réduites des droites suivantes :



6. Dans le graphique ci-dessus, tracer les droites d'équations :

$$(d_5): y = \frac{-3}{4}x + 1 \quad (d_6): y = 3x - 4$$

7. Les droites suivantes sont-elles sécantes ou parallèles ? Justifier.

$$(d_7): 5,6x + 3y + 5 = 0 \quad (d_8): -7x - 3,75y + 5 = 0$$

Exercice 3 : (3,5 points)

1. Lors du 3^{ème} trimestre, un élève a obtenu deux notes en maths. Les coefficients prévus étaient 2 et 3, ce qui lui aurait fait 12,6 de moyenne. Mais les coefficients sont finalement 3 et 5 ce qui lui fait une moyenne de 12,5. Ecrire un système d'équations correspondant à cet énoncé.
2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a. } \begin{cases} 3x - 8y = 37 \\ -5x + 4y = -43 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 3a + 11b = 12 \\ 5a + 7b = -14 \end{cases}$$

Exercice 4 : (3,5 points)

On lance une pièce truquée qui a 30% de chances de tomber sur Pile. Si elle tombe sur Pile, on choisit une balle au hasard dans une urne contenant 3 blanches et 2 vertes, et si elle tombe sur Face, on choisit une balle dans une urne contenant 3 vertes et 2 rouges. Une partie de ce jeu coûte 2 € :

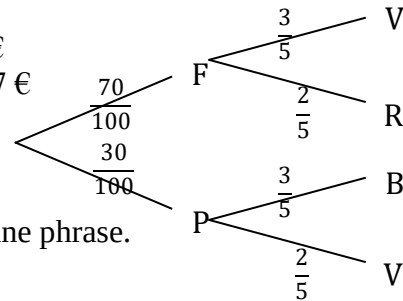
- si on obtient une boule verte, on a perdu
- si on obtient une boule rouge, on gagne 1 €
- si on obtient une boule blanche, on gagne 7 €

A l'aide de l'arbre de probabilités fourni :

1° a. Déterminer $p(R)$, $p(B)$ et $p(V)$.

b. Donner la loi de probabilité des gains.

2° Quel est le gain moyen ? Interpréter avec une phrase.

**Exercice 5 : (2,5 points)**

Un paquet de carambars contenant 10 carambars à la fraise, 6 à l'orange et 9 au citron est posé sur le bureau du professeur. Profitant d'un instant d'inattention de son professeur, Fergus prend au hasard un carambar et le cache immédiatement dans sa poche. Quelques minutes plus tard, Iliès fait la même chose...

1. Réaliser un arbre correspondant à cette situation. On notera F pour « Le carambar est à la fraise », O pour orange et C pour citron.
2. Quelle est la probabilité que Fergus & Iliès se retrouvent avec des carambars du même parfum ? On donnera la réponse finale en pourcentage.

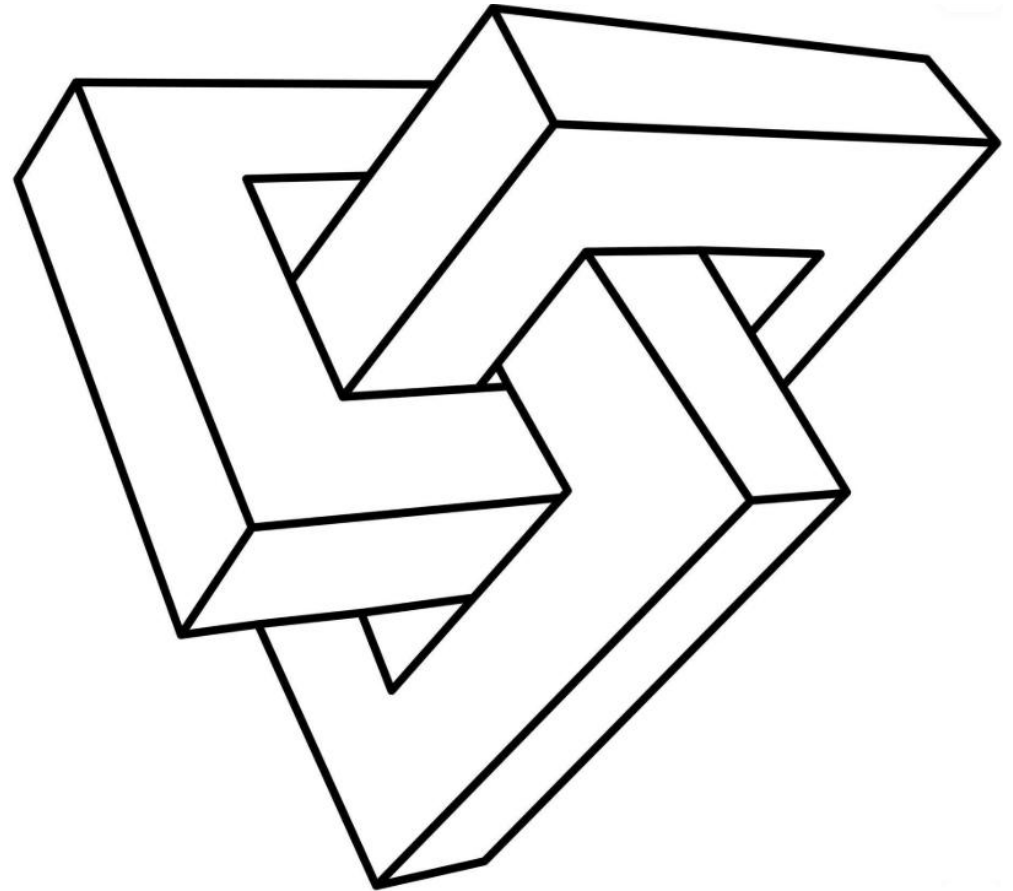
Exercice 6 : (1 points)

Simplifier au maximum le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}y = 6 \\ 240x + 150y = 750 \end{cases}$$

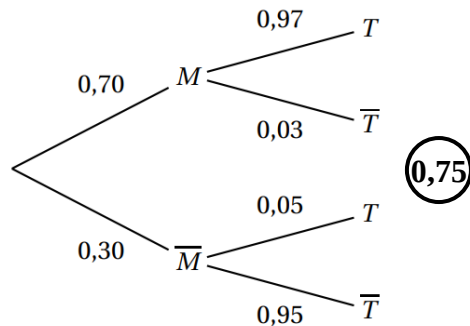
Bonus : (+1,5 points)

1. Pourquoi a-t-on commencé par compter par paquets de 5 ou de 10 ?
2. Pourquoi a-t-on fini par abandonner les chiffres romains ?
3. Comment appelle-t-on la numération actuelle, celle qui attribue à un même symbole une valeur différente suivant son emplacement ?
4. Dans cette numération, que caractérise le 0, plus pratique qu'un emplacement vide parfois ambigu ?
5. Quel mathématicien italien a importé le système décimal arabe en Europe ?
6. Vers quelle période (quel siècle) cela a-t-il eu lieu ?



MATHEMATIQUES N°9

Exercice 0 : (0,75 points)



Exercice 1 : (2,25 points)

1. a. $p(\bar{G}) = \frac{1\,323}{1\,470}$ (0,5)

b. $p(\bar{V} \cap G) = \frac{133}{1\,470}$ (0,5)

c. $p(V \cup G) = \frac{14 + 336 + 133}{1\,470} = \frac{483}{1\,470}$ (0,75) (ou $\frac{1\,470 - 987}{1\,470}$)

2. $\frac{14}{350}$ (0,5)

Exercice 2 : (6,5 points)

1. Un vecteur directeur de la droite d'équation $4x - 5y - 1 = 0$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ (0,25)

2. On a $4x + 3y + c = 0$

Avec A, on obtient $4 \times 5 + 3 \times (-2) + c = 0$

$20 - 6 + c = 0$

$14 + c = 0$

$c = -14$

Donc (d) : $4x + 3y - 14 = 0$ (1)

3. On peut prendre pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$ (0,5)

4. $m = \frac{2 - (-1)}{-3 - 4} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$ (0,5)

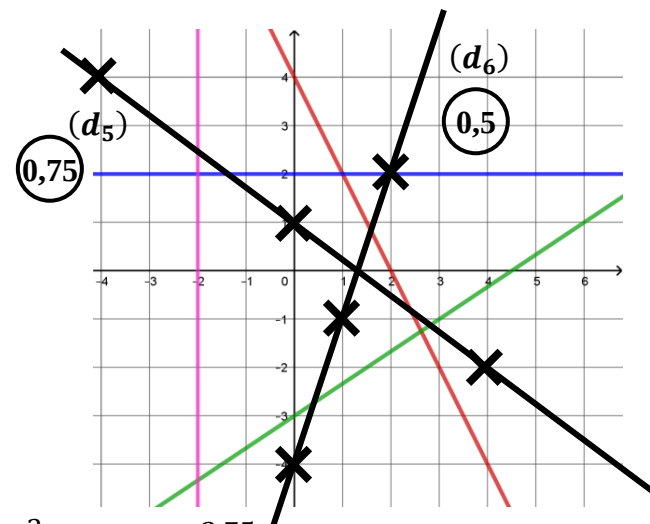
5. $(d_1) : x = -2$ (0,25)

$(d_2) : y = -2x + 4$ (0,5)

$(d_3) : y = 2$ (0,25)

$(d_4) : y = \frac{2}{3}x - 3$ (0,75)

6.



7. On a $\vec{u}_7 \begin{pmatrix} -3 \\ 5,6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_8 \begin{pmatrix} 3,75 \\ -7 \end{pmatrix}$
 $\det(\vec{u}_7, \vec{u}_8) = -3 \times (-7) - 5,6 \times 3,75$
 $= 21 - 21 = 0$
 (d_7) et (d_8) sont donc parallèles. (1,25)

Exercice 3 : (3,5 points)

1. Je note x la note du 1^{er} contrôle et y celle du 2nd contrôle : $\begin{cases} \frac{2x + 3y}{5} = 12,6 \\ \frac{3x + 5y}{8} = 12,5 \end{cases}$ (0,5)

2. a. $\begin{cases} 3x - 8y = 37 \\ -5x + 4y = -43 \end{cases} (\times 2)$ donne $\begin{cases} 3x - 8y = 37 \\ -10x + 8y = -86 \end{cases}$

$L_1 + L_2 : -7x = -49$
 $x = \frac{-49}{-7} = 7$

$L_2 : -5 \times 7 + 4y = -43$
 $4y = -43 + 35$
 $y = \frac{-8}{4} = -2$ (1,25)

Solution : (7 ; -2)

b. $\begin{cases} 3a + 11b = 12 \\ 5a + 7b = -14 \end{cases} (\times 5) \text{ donne } \begin{cases} 15a + 55b = 60 \\ 15a + 21b = -42 \end{cases}$

$L_1 - L_2 : 34b = 102$
 $b = \frac{102}{34} = 3$

$L_1 : 3a + 11 \times 3 = 12$
 $3a = 12 - 33$
 $a = \frac{-21}{3} = -7$ (1,75)

Solution : (-7 ; 3)

Exercice 4 : (3,5 points)

$$1^{\circ} p(R) = \frac{70}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{140}{500} \quad (0,5)$$

$$p(B) = \frac{30}{100} \times \frac{3}{5} = \frac{90}{500} \quad (0,5)$$

$$p(V) = \frac{70}{100} \times \frac{3}{5} + \frac{30}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{270}{500} \quad (0,75)$$

On obtient alors :

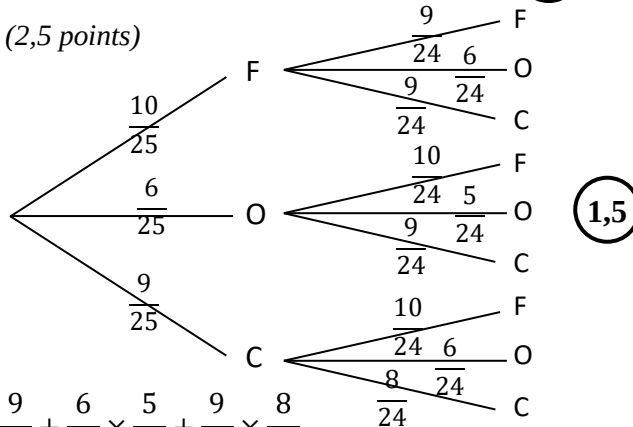
Gain	-2	-1	+5
Probabilité	$\frac{270}{500}$	$\frac{140}{500}$	$\frac{90}{500}$

$$2^{\circ} \text{ On a : } -2 \times \frac{270}{500} - 1 \times \frac{140}{500} + 5 \times \frac{90}{500} = \frac{-540 - 140 + 450}{500} = 0,46 \quad (0,75)$$

En moyenne, on perd donc 46 centimes à chaque partie. (0,25)

Exercice 5 : (2,5 points)

1.



$$\begin{aligned}
 2. p &= \frac{10}{25} \times \frac{9}{24} + \frac{6}{25} \times \frac{5}{24} + \frac{9}{25} \times \frac{8}{24} \\
 &= \frac{90}{600} + \frac{30}{600} + \frac{72}{600} \\
 &= \frac{192}{600} = 32\% \quad (1)
 \end{aligned}$$

Exercice 6 : (1 points)

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}y = 6 & (\times 9) \\ 240x + 150y = 750 & (: 10) \end{cases} \quad \text{donne} \quad \begin{cases} 6x - 8y = 54 & (: 2) \\ 24x + 15y = 75 & (: 3) \end{cases}$$

$$\text{Le système devient donc } \begin{cases} 3x - 4y = 27 \\ 8x + 5y = 25 \end{cases} \quad (1)$$

Bonus : (+1,5 points)

1. Car une main compte 5 doigts, et deux mains 10 doigts.
2. Ils nécessitaient trop de symboles différents et donnaient lieu à des calculs parfois trop compliqués (*une seule des deux réponses → accepté*)
3. La numération de position.
4. L'absence de quantité à un certain rang. (+0,25)
5. Fibonacci
6. XII^{ème} / XIII^{ème} siècle